МИНИСТЕРСТВО СПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Воронежский государственный институт
физической культуры
Колледж физической культуры

А. В. Землянко

Математика.
Алгебра и начала анализа

Рабочая тетрадь

Воронеж 2021

22
Р13

Рецензенты:

Любимова Л.А., преподаватель высшей категории цикловой комиссии математических и общих естественно-научных дисциплин филиала РГУПС в г. Воронеж.

Гущина В.И. , преподаватель первой категории цикловой комиссии математических и общих естественно-научных дисциплин филиала РГУПС в г. Воронеж.

Землянко, А.В. Математика. Алгебра и начала анализа: рабочая тетрадь / А.В. Землянко. – Воронеж, 2021. – 107 с.

Введение

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов 1 курса колледжа физической культуры и соответствует действующим программам.

Освоение содержания предмета «Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия» обеспечивает достижение студентами следующих результатов:

сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;

сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;

владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

Пособие представляет собой рабочую тетрадь по следующим разделам алгебры и математического анализа: основные свойства функции, тригонометрические функции числового аргумента, решение тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений, дифференцирование, исследование функции с помощью производной, интегрирование.

Представленные в пособии задания являются обязательными для рассмотрения студентами всех специальностей.

Задания рабочей тетради соотнесены со структурой теоретического курса, предусмотренного программой. Объем представленных задач и упражнений рассчитан на реализацию в рамках учебного времени изучения математики (с некоторым запасом).

Рабочую тетрадь можно достаточно эффективно использовать в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных работ, собеседований, зачетов.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

1.1. Числовая функция

1. Соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, называется ____.

2. Как обозначаются числовые функции?

____.

3. Областью определения функции называется

____

____

____.

4. Множеством значения функции называется

____

____

____.

5. Перечислите известные вам числовые функции, запишите для них D и E.

____

____

____

____

____

____

6. а) $f(x)=\frac{1}{2}x-2$;

$D(f)=$ ______________;

$E(f)=$ ______________.

б) $f(x)=3-\frac{1}{x}$;

$D(f)=$ ______________;

$E(f)=$ ______________.

в) $f(x)=x^2-4x+4$;

$D(f)=$ ______________;

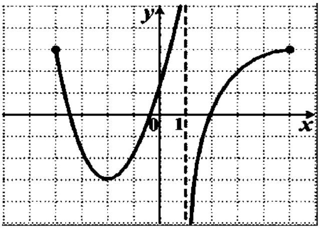
$E(f)=$ ______________.

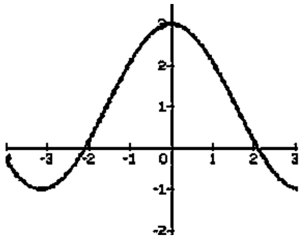
г) $f(x)=\sqrt{x-2}$;

$D(f)=$ ______________;

$E(f)=$ ______________.

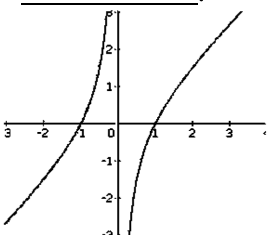
7. Укажите область определения и область значений функций, графики которых изображены на рисунке.

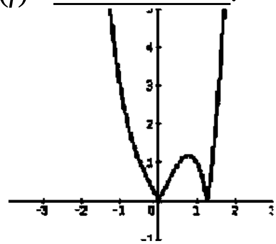
а) 

б) 

$D(f)$ =____________;
$E(f)$= ____________.

$D(f)$ =____________;
$E(f)$= ____________.

в) 

г) 

$D(f)$ =____________;
$E(f)$= ____________.

$D(f)$ =____________;
$E(f)$= ____________.

8. Для того чтобы найти значение данной функции в какой-либо точке ее области определения, необходимо

____

____

____.

9. Для функции $y=f(x)$ вычислить:

а) $f(x)=x+1$;

$f(1)=$ ______________ $f(x-1)=$ ______________

$f(t)=$ ______________ $f(-2)=$ ______________

$f(2x+1)=$ ______________ $f(x^2)=$______________

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)=$ ______________ $5f\left(\frac{x}{5}\right)=$ ______________

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

$f(1)=$ ______________ $f(x–1)=$ ______________

$f(t)=$ ______________ $f(–2)=$ ______________

$f(2x+1)=$ ______________ $f(x^2)=$______________

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)=$______________ $5f\left(\frac{x}{5}\right)=$ ______________

в) $f(x)=x^2$;

$f(1)=$ ______________ $f(x–1)=$ ______________

$f(t)=$ ______________ $f(–2)=$ ______________

$f(2x+1)=$ ______________ $f(x^2)=$ ______________

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)=$______________ $5f\left(\frac{x}{5}\right)=$______________

г) $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

$f(1)=$ ______________ $f(x–1)=$ ______________

$f(t)=$ ______________ $f(–2)=$ ______________

$f(2x+1)=$ ______________ $f(x^2)=$ ______________

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)=$______________ $5f\left(\frac{x}{5}\right)=$ ______________

1.2. Четность – нечетность функции

1. Функция *f* называется четной, если ______________________

____

2. Функция *f* называется нечетной, если ____________________

____

3. Функция *f* называется функцией общего вида, если________

____

4. Для исследования функции на четность-нечетность необходимо ____

____

____

5. Из перечисленных ниже функций выберите четные, нечетные и функции общего вида:

а) $y=x^2-1$; б) $y=\frac{2}{x}+x$; в) $y=2x-3$;

г) $y=3x^3-1$; д) $y=\frac{x^4-2}{5+3x^2}$; е) $y=\frac{2}{x^5}-\frac{1}{x}$.

Четные: ____

Нечетные: ____

Функции общего вида: _________________________________

6. Исследуйте функции на четность-нечетность, запишите результат:

а) $f(x)=3x^2-x$

____

____

б) $f(x)=\sqrt{2-x}$

____

____

в) $f(x)=\frac{x^2}{x^4-5}$

____

____

г) $f(x)=3x^3-x$

____

____

д) $f(x)=x^3(2x^2-x)$

____

____

е) $f(x)=\frac{3x^3}{8-x^5}$

____

____

7.Соединив чертой, составьте верное высказывание:

график четной функции	не имеет симметрии относительно осей координат
график нечетной функции	симметричен относительно оси ординат
график функции общего вида	симметричен относительно начала координат

1.3. Возрастание и убывание функций. Экстремумы

1.Функция f возрастает на множестве P, если _______________

____

____

2. Функция f убывает на множестве P, если ________________

____

____

3. $\left.\begin{array}{l} x_2 > x_1 \\ f(x_2) > f(x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$ функция ________________

$\left.\begin{array}{l} x_2 > x_1 \\ f(x_2) < f(x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$ функция ________________

4.Промежутками монотонности функции называются

____

____

5. Окрестностью точки a называется________________________

____

____

6. Точка x_0 называется точкой минимума функции f, если

____

____

7. Точка x_0 называется точкой максимума функции f, если

____

____

8. Функция $y=f(x)$ задана графиком на промежутке (–10;4). Укажите:

а) промежутки возрастания функции

____

б) промежутки убывания функции

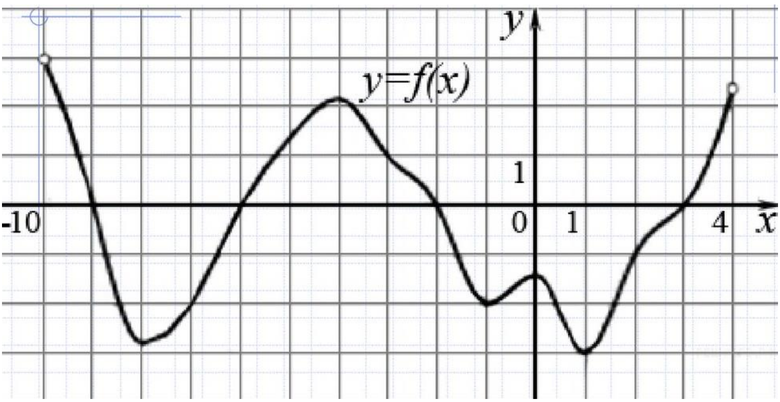
____

в) наибольшее значение функции

____

г) наименьшее значение функции.

____



9. Функция $y=f(x)$ задана графиком на промежутке (–7;5). Укажите:

а) точки минимума функции ______________________

б) точки максимума функции ______________________

в) значение функции в точках минимума ______________

____

г) значение функции в точках максимума ______________

____

д) перечислить экстремумы функции ______________________

____

е) интервалы возрастания функции ______________________

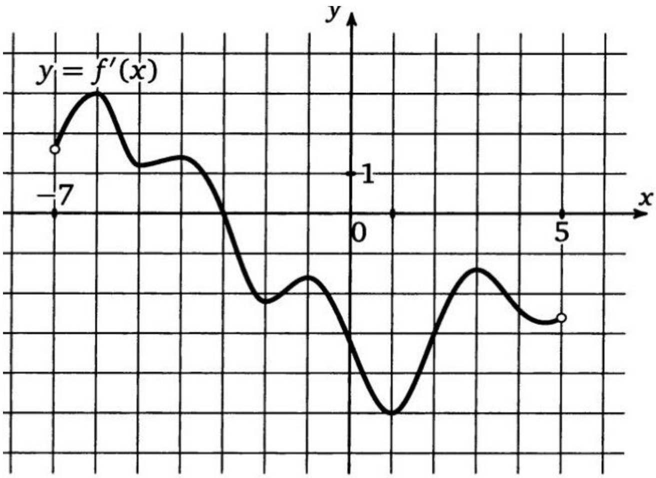
____

ж) интервалы убывания функции ______________________

____

з) наибольшее значение функции ______________________

и) наименьшее значение функции ______________________



10. Построить эскиз графика функции, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f) = R$;

б) $E(f) = [-2; -1]$;

в) функция возрастает на интервалах $[-2;0] \cup [2;+\infty)$;

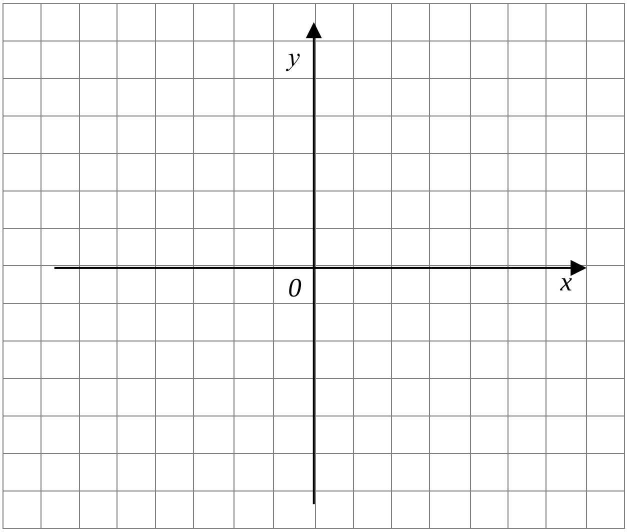
г) функция убывает на $(-\infty;-2] \cup [0;2]$;

д) $x_{min} = -2$; $f_{min} = -2$;

$x_{min} = 2$; $f_{min} = -2$;

$x_{max} = 0$; $f_{max} = -1$;

е) функция является четной.



11. Если на множестве *P* большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция называется____

12. Если на множестве *P* большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция называется____

13. Точка, в которой возрастание функции меняется на убывание, называется __________________________________.

Значение функции в этой точке называется ______________.

14. Точка, в которой убывание функции меняется на возрастание, называется _______________________________.

Значение функции в этой точке называется ______________.

15. Экстремумами функции называются____________________
____.

16. Функция $y=f(x)$ задана графиком.

Опишите свойства функции:

а) $D(f)=$ ______________

б) $E(f)=$ ______________

в) функция возрастает при $x \in$ ________________;

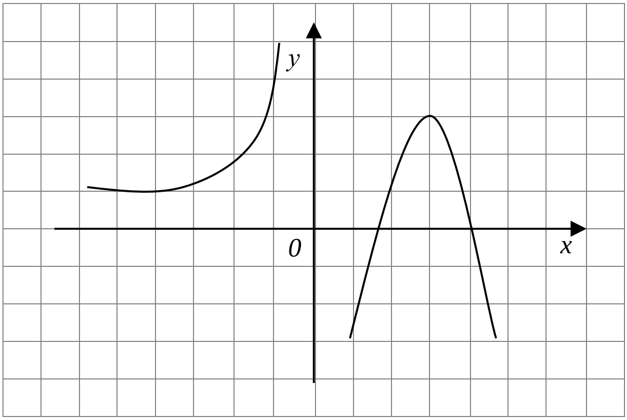
г) функция убывает при $x \in$ ________________;

д) x_{min} = _____; f_{min} = _____;

x_{max}= _____; f_{max}= _____;

е) перечислите точки пересечения графика функции с осями координат ____

____.



17. Укажите функции, имеющие экстремумы, и определите вид экстремума, если таковой существует:

а) $f(x)=2x+3$

____

____;

б) $f(x)=3x^2+4x–6$

____

____;

в) $f(x)=x^3–4$

____

____;

г) $f(x)=\dfrac{3}{x}+1$

____

____

д) $f(x)=4-x^2$

____

____.

18. Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$, x_1, $x_2 \in D(f)$, причем $x_2 > x_1$.

Если $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то функция ____________________________

Если $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то функция____________________________

19. Найдите промежутки монотонности следующих функций:

а) $f(x)=3-\dfrac{x}{2}$

____

____

____

б) $f(x)=(x-2)^2$

____

____

____

в) $f(x)=3-\dfrac{2}{x}$

____

____

____

г) $f(x)=3-x^2$

____

____

____

д) $f(x)=1-x^3$

____

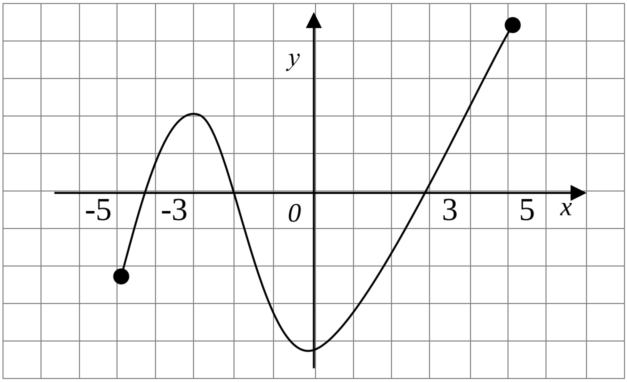
____

____

20. Дан график функции $y=f(x)$ на отрезке $[-5; 5]$. Какое из утверждений верно:

а) $x=2$ – точка максимума функции $f(x)$;

б) $x = -3$ – точка максимума функции $f(x)$;
в) $x=3$ – точка максимума функции;
г) $x=5$ – точка максимума функции.



1.4. Общая схема исследования функции

1. Областью определения функции называется
____
____
____

4. Для исследования функции на четность-нечетность, необходимо ____
____
____

5. Дана функция $y = f(x)$. Корни уравнения $f(x) = 0$ называются
____.

6. Для того чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox, нужно ____
____

Для того чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Oy, нужно ____

____.

7. Промежутки знакопостоянства функции – это промежутки, на которых ____

8. Если на некотором промежутке $f(x) > 0$, то график функции расположен ____.

Если на некотором промежутке $f(x) < 0$, то график функции расположен ____.

9. Сформулируйте метод интервалов: ________________________

____

____

10. График функции в точке максимума имеет вид

____.

В окрестности точки минимума графики изображаются в виде

____.

11. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x)=\sqrt{2-x}$

____

б) $f(x)=3x-\dfrac{1}{x+2}$

____

в) $f(x)=\dfrac{2x}{x^3+1}$

____

12. Исследуйте функцию на четность–нечетность

а) $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x}$

$f(-x) =$ ____

____

б) $f(x)=3x^2-4x^4$;

$f(-x) =$ ____

____

в) $f(x)= \dfrac{3x}{5-x}$;

$f(-x) =$ ____

____

13. Найдите точки пересечения графиков следующих функций с осями координат:

а) $f(x)=(x–2)^2$; Ox: ______________; Oy: ______________;

б) $f(x)=3-\dfrac{1}{x-3}$; Ox: ______________; Oy: ______________;

в) $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$; Ox: ______________; Oy: ______________;

14. Найдите для функции $y=f(x)$ промежутки знакопостоянства:

а) $f(x)=x^2(x–2)^2$

$f(x) > 0$ при $x \in$

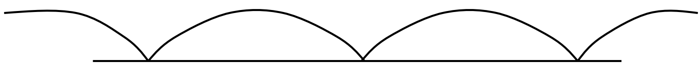
$f(x) < 0$ при $x \in$

б) $f(x)=\dfrac{2x^2}{3-x}$

$f(x) > 0$ при $x \in$

$f(x) < 0$ при $x \in$

в) $f(x)= \dfrac{x}{4-x^2}$



$f(x) > 0$ при $x \in$

$f(x) < 0$ при $x \in$

15. Исследуйте на монотонность следующие функции:

а) $f(x)=\frac{8}{x}+\frac{1}{2}$; $f(x)\nearrow$ при $x\in$ ______; $f(x)\searrow$ при $x\in$ ______

____

____

б) $f(x)=2-\frac{x}{2}$; $f(x)\nearrow$ при $x\in$ ______; $f(x)\searrow$ при $x\in$ ______

____

____;

в) $f(x)=x^2-3x+2$; $f(x)\nearrow$ при $x\in$ ______; $f(x)\searrow$ при $x\in$ ______

____

____.

16. Найдите экстремумы следующих функций:

а) $f(x)=3x-1$

____

____

____

б) $f(x)=4x-x^2$

____

____

____

в) $f(x)=x^2+5x+4$

____

____

17. Функция $y=f(x)$ задана графиком. Опишите свойства этой функции по общей схеме:

а) $D(f)$ = ___________; $E(f)$ = ___________

б) функция является ______________________________________

в) точки пересечения с осями: Ox: __________ Oy: __________

г) промежутки знакопостоянства функции:

$f(x) > 0$ при $x \in$ ______________________________________;

$f(x) < 0$ при $x \in$ ______________________________________;

д) промежутки монотонности функции:

$f(x) \nearrow$ при $x \in$ ___________________________________;

$f(x) \searrow$ при $x \in$ ___________________________________;

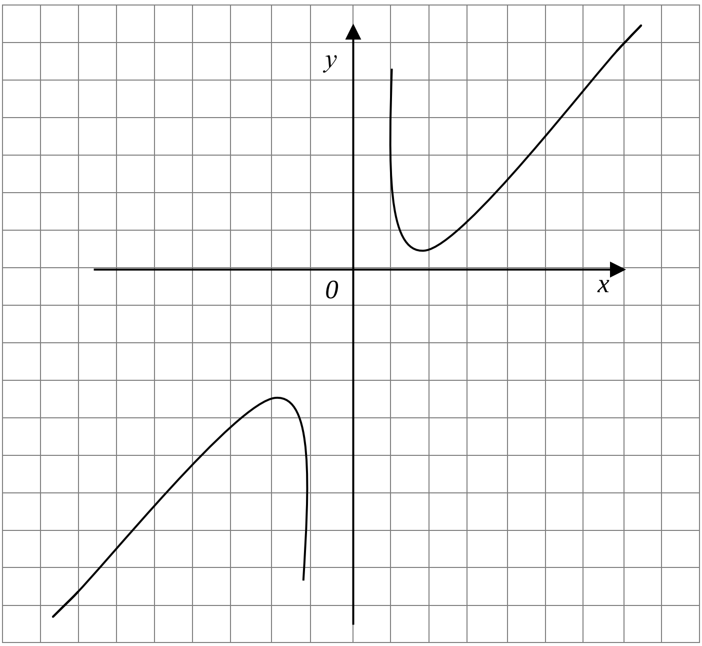
е) экстремумы функции

x_{max}= ___________; f_{max}= ___________;

x_{min}= ___________; f_{min}= ___________;

ж) асимптоты графика функции

x= ___________; y=___________.



18. Постройте график функции $y= f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f)= R$; $E(f)=R$;

б) функция общего вида;

в) Ox : (–3; 0); (1; 0);

Oy : (0; 1);

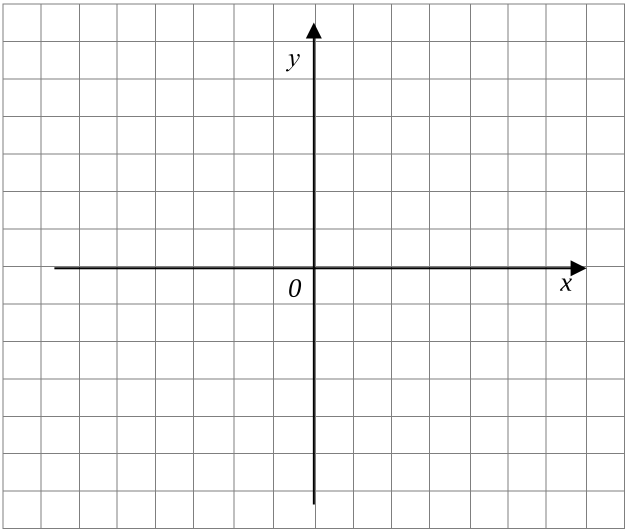
г) $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -3)$;

$f(x) > 0$ при $x \in (-3; 1) \cup (1; \infty)$;

д) $f(x)$ $\nearrow$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;

$f(x)$ $\searrow$ при $x \in [-1; 1]$;

е) $x_{max} = -1$; $f_{max} = 4$; $x_{min} = 1$; $f_{min} = 0$.



ТЕМА 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

2.1. Радианная мера угла

1. Углом в 1 радиан называют ______________________________

____

2. 1 рад $\approx$ _____ ^{0}.

3. Угол в α радиан равен ______ градусов.

Радианная мера угла в α градусов равна ___________________

____.

4. Выразите в радианах:

$1^0 =$ ______; $10^0 =$ ______; $15^0 =$ ______; $30^0 =$ ______;
$45^0 =$ ______; $60^0 =$ ______; $70^0 =$ ______; $90^0 =$ ______;
$120^0 =$ ______; $135^0 =$ ______; $150^0 =$ ______; $210^0 =$ ______;
$225^0 =$ ______; $240^0 =$ ______; $320^0 =$ ______; $330^0 =$ ______.

5. Выразите в градусах:

$\frac{\pi}{15} =$ __________; $\frac{\pi}{12} =$ __________; $\frac{\pi}{8} =$ __________;
$\frac{7\pi}{9} =$ __________; $\frac{2\pi}{3} =$ __________; $\frac{11\pi}{6} =$ __________;
$1{,}5\pi =$ __________; $3\pi =$ __________; $0{,}25\pi =$ __________;
$\frac{21}{4}\pi =$ __________; $\frac{31}{6}\pi =$ __________; $\frac{101}{12}\pi =$ __________.

6. Единичной окружностью называют окружность __________

____

____.

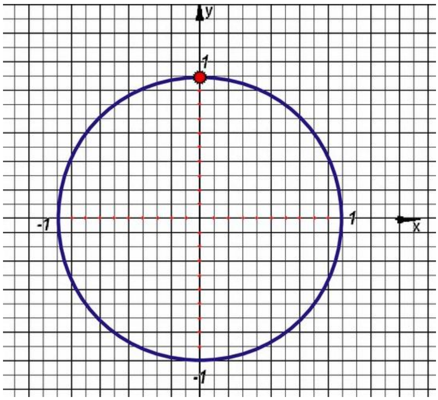
7. За положительное направление движения точки по единичной окружности принимают _________________________________

____

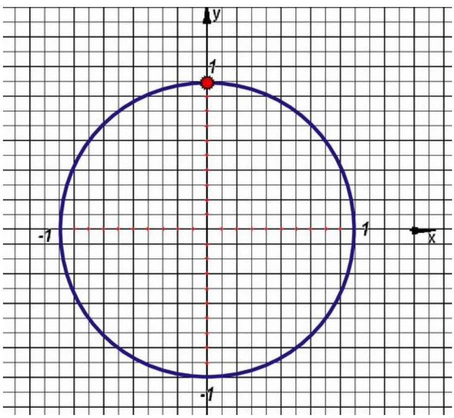
За отрицательное направление движения точки по единичной окружности принимают ________________________________

____.

8. На единичной окружности постройте угол $-\alpha$, если α имеет следующее значение: -30^0; $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{6}$; -270^0; 15^0.



9. На единичной окружности постройте точку P_t, соответствующую следующим значениям t: $t = \dfrac{11}{2}\pi$; $t = -3\pi$; $t = 45^0$; $t = -405^0$; $t = 5\pi$; $t = -1035^0$.



10. Для каждого из приведенных значений t укажите такое значение t', при котором точки Pt и Pt':

а) диаметрально противоположны;

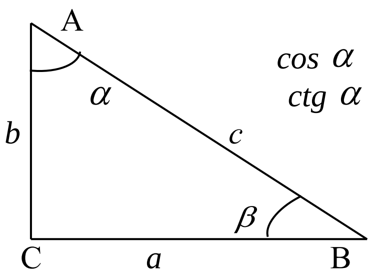
б) симметричны относительно оси OX;

в) симметричны относительно оси $OУ$;

t / t'	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
а)						
б)						
в)						

2.2. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла. Основные формулы тригонометрии.

1.



$\cos\alpha$ = ______; $\sin\alpha$ = ______;
$ctg\,\alpha$ = ______; $tg\,\alpha$ = ______.

2. Синусом угла α называют ________________________________

____.

Косинусом угла α называют ________________________________

____.

Тангенсом угла α называют ________________________________

____

Котангенсом угла α называют ______________________________

3. Как связаны между собой

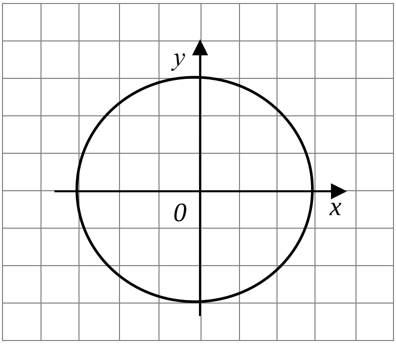
а) Тангенс и котангенс одного и того же угла ______________

б) Тангенс и косинус одного и того же угла _______________

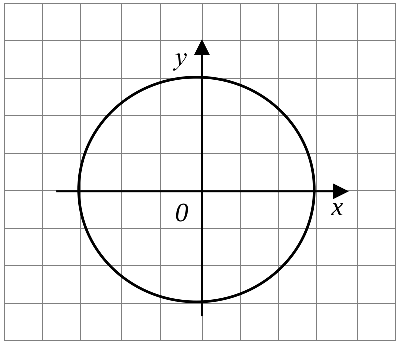
в) Котангенс и синус одного и того же угла _______________

4. Проставьте знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

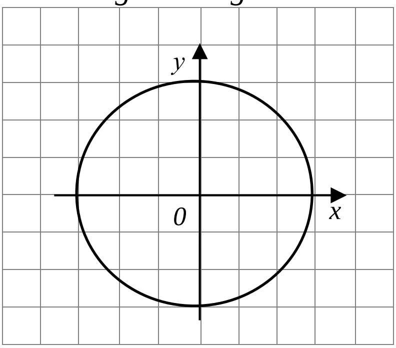
$\sin\alpha$



$\cos\alpha$



$tg\,\alpha$ и $ctg\,\alpha$



5. В какой четверти угол α, если:

$\alpha = 283^0$ ______; $\alpha = -20^0$ ______; $\alpha = 4200^0$ ______;

$\alpha = 179^0$ ______; $\alpha = -325^0$ ______; $\alpha = -800^0$ ______.

6. $\sin(-\alpha) =$ _____________; $\cos(-\alpha) =$ _____________;

$tg\,(-\alpha) =$ ______________; $ctg\,(-\alpha) =$ ______________.

7. Из основного тригонометрического тождества следует, что
$sin\,\alpha =$ ____;
$cos\,\alpha =$ ____.

8. Найдите значение выражения:
$sin\,(-30^0) =$ _______; $cos(-60^0) =$ _______; $tg\,(-45^0) =$ _______
$ctg\,(-30^0) =$ _______; $cos(-90^0) =$ _______; $sin(-45^0) =$ _______.

9. Вычислите:

а) $2\,cos\,60^0 + \sqrt{3}\,cos\,60^0 =$ ____;

б) $5\,sin\,30^0 - ctg\,45^0 =$ ____;

в) $3\,tg\,45^0 \cdot tg\,60^\circ =$ ____;

г) $2\,sin\,60^0 \cdot ctg\,60^0 =$ ____;

д)$7\,tg\,30^0 \cdot ctg\,30^\circ =$ ____.

10. Формулами сложения называются формулы вида

____
____
____
____
____.

11. Запишите формулы, выражающие тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов.

____
____
____
____
____
____

12. Проставьте знаки «+» или «–» в выражениях, чтобы получилось верное равенство:

$cos\,\alpha\, cos\,\beta \quad\; sin\,\alpha\, sin\,\beta\; = cos(\alpha \;+\; \beta);$

$sin\,\alpha\, cos\,\beta\; - sin\,\beta\, cos\,\alpha\; = sin(\alpha \quad\;\; \beta);$

$cos\,\alpha\, sin\,\beta \quad\; cos\,\beta\, sin\,\alpha\; = sin(\beta \;+\; \alpha);$

$sin\,\beta\, sin\,\alpha\; + cos\,\alpha\, cos\,\beta\; = cos(\alpha \quad\;\; \beta);$

$tg(\alpha \quad\;\; \beta) = \dfrac{tg\beta + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}; \quad tg(\alpha \;-\; \beta) = \dfrac{tg\alpha \quad tg\beta}{tg\alpha \;\; tg\beta + 1}.$

13. Запишите формулы двойного угла.

____

____

____

____

14. Формулами приведения называют формулы вида

____

____.

15. Запишите общее правило приведения.

____

____

____

____

____

____

____

16. Запишите формулы половинного угла:

$sin^2\frac{\alpha}{2} =$ __________; $cos^2\dfrac{\alpha}{2} =$ __________; $tg\,\dfrac{\alpha}{2} =$ __________;

17. Используя мнемоническое правило, заполните таблицу:

угол / функция	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin								
cos								
tg								
ctg								

18. Допишите формулу.

$\sin\alpha + \sin\beta =$ ______________________

______________ $= 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

______________ $= 2\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta =$ ______________________

19. Вычислите:

а) $3+8\,tg^2 x\cdot\cos^2 x$, если $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

____

____

б) $\dfrac{24\sin 14^0\cdot\cos 14^0\cdot\cos 28^0}{\cos 34^0}$ ______________________________

____

___

в) $\dfrac{5\ ctg\ \left(\alpha + \dfrac{7\pi}{2}\right)}{4\ tg\ (\alpha + 3\pi)}$, если $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$;

___

___

___

г) $\dfrac{3\cos\alpha + 3\sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $ctg\,\alpha = 5$;

___

___

___

___

д) $\sqrt{3}(cos^4 15 - sin^4 15)$ ___

___

___

___

2.3. Графики тригонометрических функций

1. Функция называется периодической с периодом $T \neq 0$, если___

___

___

___

2. Что можно сказать про график периодической функции?

___

___

3. Какие периодические функции вам известны?

___

4. $sin\ (x+360^0) =$ ___ $cos\ (x - 6\pi) =$ ___

$tg\ (\frac{\pi}{4}+3\pi)=$ ___________ $ctg\ (\frac{\pi}{3}-450^0)=$ ___________

5. Заполните таблицу, если:
1.1. – $D\ (f)$;
1.2. – $E\ (f)$;
2.1. – четность (нечетность);
2.2. – наименьший положительный период;
3.1. – координаты точек пересечения графика с осью Ox;
3.2. – координаты точек пересечения графика с осью Oy;
4.1. – промежутки, на которых $f\,(x)>0$;
4.2. –промежутки, на которых $f\,(x)<0$;
5.1. – промежутки возрастания;
5.2. – промежутки убывания;
6.1. – точки минимума;
6.2. – минимумы функции
6.3. – точки максимума;
6.4. – максимумы функции.

	$f(x)=$ $sinx$	$f(x)=$ $cosx$	$f(x)=$ tgx	$f(x)=$ $ctgx$
1.1.				
1.2.				
2.1.				
2.2.				
3.1.				
3.2.				
4.1.				
4.2.				
5.1.				
5.2.				
6.1.				
6.2.				
6.3.				
6.4.				

2.4. Обратные тригонометрические функции

1. Сформулируйте теорему о корне.

____

____

____

2. $f(x) = sinx$, $f(x)$ $\nearrow$ при $x \in$ ________________;
$f(x) = cosx$, $f(x)$ $\searrow$ при $x \in$ ________________;
$f(x) = tgx$, $f(x)$ $\nearrow$ при $x \in$ ________________;
$f(x) = ctgx$, $f(x)$ $\searrow$ при $x \in$ ________________.

3. Арксинусом числа a называется________________________

____

____

4. Арккосинусом числа a называется ______________________

____

____

5. Арктангенсом числа a называется ______________________

____

____

6. Арккотангенсом числа a называется ____________________

____

____

7. Заполните таблицу:

	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
arcsin								
arccos								
arctg								
arcctg								

8. Вычислите:

$sin\,(arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}) =$ _________; $arcsin\,(sin\frac{\pi}{3}) =$ _________;

$\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$ _________; $-\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$ _________;

$\arccos\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ _________; $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$ _________;

$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) =$ _________; $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) =$ _________;

$-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 2\right) =$ _________; $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}(-2)\right) =$ _________;

$-\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right) =$ _________; $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}(-1)\right) =$ _________

9. Вычислите:

а) $\arccos(-1) - 2\operatorname{arcctg} 0 =$ ______________________________

б) $\arcsin(-1) + 2\operatorname{arctg} 0 =$ ______________________________

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{3} =$ ______________________________

г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{3} =$ ______________________________

д) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$ ______________________________

е) $\arccos\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$ ______________________________

10. Вычислите:

а) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) - 2\arcsin 1 =$ ______________________________

б) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)+2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} =$ ______________________________

в) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) =$ ______________________________

г) $\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) =$ ______________________________;

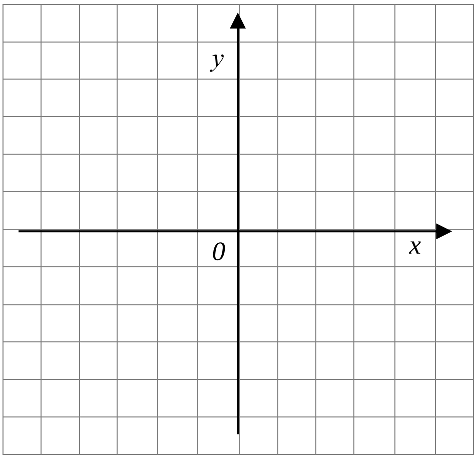
д) $\arccos(\sin(\mathrm{arctg}\,0)) =$ ______________________________;

е) $\arcsin(\cos(\mathrm{arcctg}\,0)) =$ ______________________________.

2.5. Решение тригонометрических уравнений

1. Простейшим тригонометрическим уравнением называют уравнение вида ______________________________.

2. Отметить на единичной окружности решения уравнения $\cos x = \dfrac{1}{2}$.



3. Запишите решение следующих уравнений:

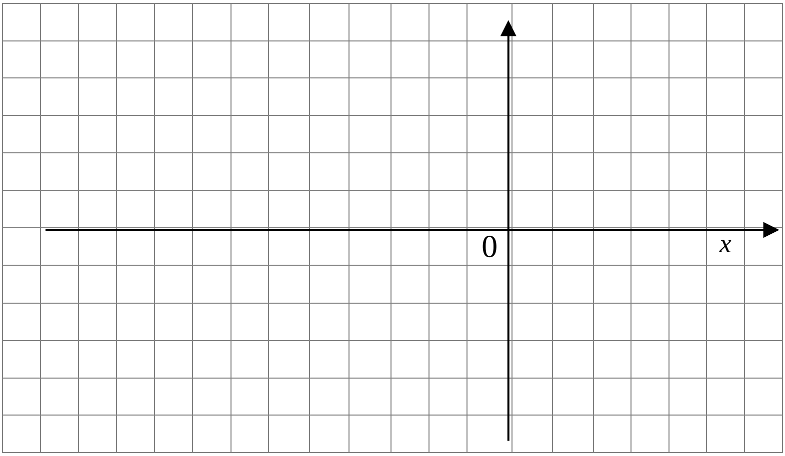
$\cos x = a$; $x =$ ______________________________

$\sin x = a$; $x =$ ______________________________

$\mathrm{tg}\,x = a$; $x =$ ______________________________

$\mathrm{ctg}\,x = a$; $x =$ ______________________________

4. Найдите количество решений уравнения $sin\ x = \frac{1}{2}$ на интервале $[-3\pi;\ \frac{3\pi}{2}]$, решения отметьте на графике.



5. Заполните таблицу:

	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	общий вид
$sinx=a$				
$cosx=a$				
$tgx=a$				
$ctgx=a$				

6. Решите уравнения:

а) $2\ cos\ x = \frac{\sqrt{8}}{2}$

б) $tg\ (\pi - x) + \sqrt{3} = 0$

в) $sin\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}=0$

г) $2\,cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{2}=0$

7. Укажите абсциссы точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox:

а) $f(x)=sin\,6x-\frac{1}{2}$

б) $f(x)=cos\,2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $f(x)=4\,sin\,\frac{x}{4}\,cos\,\frac{x}{4}-\sqrt{2}$

10. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $f(x)=2\,tg^2x+\sin^2x$, $g(x)=1+tg^2x-cos^2x$

б) $f(x)=tgx-\frac{1}{tg^2x}$, $g(x)=1-ctg^2x$

в) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$, $g(x) = 1$;

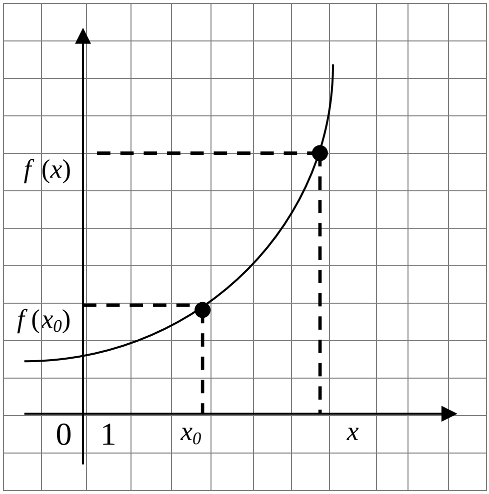
ТЕМА 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

3.1. Приращение функции.

1. Вычислить по графику:

$x - x_0 =$ ________; $f(x) - f(x_0) =$ ________; $x_0 + \Delta x =$ ________;

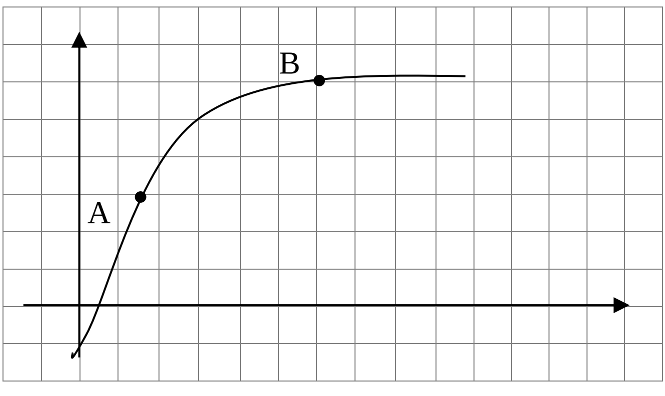
$f(x_0) + \Delta f =$ ________; $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) =$ ________.



2. Может ли Δx быть отрицательными числом? ________

Может ли Δf быть отрицательным числом? ________

3.



К графику функции через точки А и В провести секущую l.
Чему равен угловой коэффициент прямой $y = kx + b$?

____

Выразите угловой коэффициент секущей через Δf и Δx.

____

4. Геометрический смысл приращений заключается в том, что

____

____

____.

5. Пусть материальная точка движется по прямой и известна ее координата $x(t)$. Тогда среднюю скорость ее движения за промежуток времени $[t_0; t_0+\Delta t]$ можно записать как $V_{ср}$=

____.

6. Средней скоростью изменения функции на промежутке с концами x_0 и $x_0+\Delta x$ называют выражение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$= ________________.

7. Найдите приращение функции:

а) $f(x) = 2x – 3$, если $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,2$

Δf =____

б) $f(x) = x^2 + 2$, если $x_0 = –2$, $\Delta x = 0,01$

Δf =____

8. а) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

Δx = ____

Δf =____

б) $f(x) = x^2 – x$, $x_0 = 2,5$, $x = 2,6$

Δx = ____

Δf =____

в) $f(x)=\operatorname{ctg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

Δx= ____

Δf=____

9. Найдите $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если:

а) $y=ax^2 + bx$

б) $y=ax^3$

в) $y=x + \frac{1}{x}$

10. Для функции $y = \frac{1}{x}$ найдите Δy и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если:
а) $x_0 = 9$, $x = 9{,}06$

б) $x_0 = 4{,}02$, $x = 4{,}04$

в) $x_0 = 5{,}06$, $x = 5{,}03$

г) $x_0 = 6$, $x = 5{,}98$

3.2. Понятие производной

1. Производной функции f в точке x_0 называется

.

2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$ ________.

3. Запишите общую схему вычисления производной:
1) ____;
2) ____;
3) ____.

4. По общей схеме вычислите производные следующих функций:

а) $f(x)= 2x^2+3x$

____
____
____
____

б) $f(x)= x^3+x$

____
____
____
____

в) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

____
____
____
____;

г) $f(x) = -\frac{1}{2x^2}$

____
____
____
____

д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

____
____
____
____

5. Что значит продифференцировать функцию?

6. Заполните таблицу:

$f(x)$	$(kx+b)$			$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	c=const	
$f'(x)$		$2x$	k				$3x^2$

7. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0.

а) $f(x) = \frac{x^2}{4} - x$, $x_0 = 2$

б) $f(x) = \frac{2}{x} + 1$, $x_0 = -1$

.

8. Пользуясь определением, найдите $f'(x)$ в каждой точке $D(f)$.

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$

б) $f(x) = \frac{3}{x^2} - 7$

.

9. Операция вычисления производной называется

.

10. Найдите точки, в которых производная функции $y=x^2$:

а) равна нулю

;

б) больше нуля

;

в) меньше нуля ____
____.

3.3. Правила дифференцирования

1. Запишите общую схему вычисления производной:

1)____

2)____

3)____

2. Выпишите формулы дифференцирования:

$(u \pm v)' =$

$(u \cdot v)' =$

$\left(\frac{u}{v}\right)' =$

$(x^n)' =$

3. Используя правила дифференцирования, вычислите производные функции:

а) $f(x)=x^7 + 2x^5 + \frac{4}{x^2} - 1$

____

б) $f(x)=\sqrt{x} \cdot (3x^3 - 16x)$

____

в) $f(x)=\frac{4-x^2}{3+2x}$

____.

4. Найдите производную функции:

а) $f(x)=100x^{10}–10x^{100}$ в точках x и 1

____

____

б) $f(x)=10x^9–9x^{10}$ в точках x и –1

____

____

в) $f(x)=(x+1)\cdot \sqrt{x}$ в точках 2; 4; x; x–2

____

____

____

5. Найдите значение $f'(x)=0$, если

а) $f(x) = \frac{3}{5-4x}$

б) $f(x) = \frac{x^3}{6} - 0{,}5x^2 - 3x + 2$

в) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

6. а) $f(x) = (2x-3)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) + f(1)$

б) $f(x) = (3x+4)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) - f(1)$

7. Решите уравнение $f'(x)=0$, если

а) $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$

б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$

в) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

8. Составьте и решите уравнения:

а) $f'(x) = f'(-2)$, если $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+4}$

б) $f'(x) = f(x) - 2x$, если $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

9. Решите неравенство $g'(x) < 0$, если $g(x) = (x-3)(x+2)^2$

3.4. Производная сложной функции

1. Вычислите $f(1)$, если:

а) $f(x) = \sqrt{3x+1}$:

1) $3x+1=$ ____________;

2) $\sqrt{3x+1} =$ ____________;

б) $f(x) = (2x+2)^3$:

1) $2x+2 =$ ____________;

2) $(2x+2)^3 =$ ____________;

в) $f(x) = \cos(x - \frac{3\pi}{4})$:

1) $x - \frac{3\pi}{4} =$ ____________;

2) $\cos(x - \frac{3\pi}{4})=$ ____________.

2. Сложная функция записывается в виде $h(x)=$ ____________, где $f(x)$ ____.

3. Область определения сложной функции $f(g(x))$ – это множество____

4. Производная сложной функции вычисляется по формуле $h'(x)$= ___________________.

5. Задайте с помощью формул функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:

а) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ и $g(x) = \sqrt{x}$;

б) $f(x) = cosx$ и $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2x$;

в) $f(x) = x^3$ и $g(x) = tgx$;

6. Найдите $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = (4x+3)^6$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = (2-3x)^5$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$, $x_0=3$;

г) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$, $x_0= -2$;

д) $f(x) = (3x - 5)^3 + \frac{1}{(3-x)^2}$, $x_0=2$;

е) $f(x) = \frac{1}{(2x+7)^4} - (1 - x)^3$, $x_0= -3$;

ж) $f(x) = \sqrt{5 - 4x - x^2}$, $x_0= -2$;

з) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$, x_0=4;

7. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2$;

б) $f(x) = (x^2 - 2x - 3)^2$;

в) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$;

г) $f(x) = \sqrt{x^3 + \frac{243}{x}}$;

8. Докажите тождества:

а) $f'(x) = \frac{1}{x-2} f'(3) \cdot f(x)$, если $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$;

б) $f'(x) = \frac{1}{x+1} f'(0) \cdot f(x)$, если $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$;

.

9. Докажите, что при всех допустимых значениях x верно ра-

венство $\left(f\left(f(x)\right)\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$, если $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

10. Докажите, что при всех допустимых значениях x верно равенство $\left(f\left(f(x)\right)\right)' = \frac{f'(x)}{(f(x))^2}$, если $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

11. Решите уравнение $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = 0$ и $\left(g\left(f(x)\right)\right)' = 0$, если:

а) $f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = \frac{1}{x}$

б) $f(x) = x^2 - 4x$ и $g(x) = \sqrt{x}$

3.5. Производные тригонометрических функций

1. Заполните таблицу:

$f(x)$	$cosx$		$3tgx$	$ctgx$				$-ctgx$	
$f'(x)$		$cosx$			$5cosx$	$-\frac{3}{cos^2x}$	$sinx$		$-\frac{6}{sin^2x}$

2. Вычислить производные следующих функций:

а) $f(x)=cosx - sinx$

____;

б) $f(x)=3tgx - 3x$;

____;

в) $f(x)=5-ctgx$;

____;

г) $f(x)=cos^2x-sin^2x$;

____

д) $f(x)=sin^2x-cos^2x$;

____

3. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x)=\sin(3x-9)$;

____

б) $f(x)=\sin(1-\frac{x}{2})$;

____

в) $f(x)=\cos(9x-10)$;

____

г) $f(x)=\cos(\frac{\pi}{3}-x)$;

____

д) $f(x)=\mathrm{tg}(5x-\frac{\pi}{4})$;

____

е) $f(x)=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3})$;

____

ж) $f(x)=\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{6}-4x)$;

з) $f(x)=\mathrm{ctg}(\pi - \frac{x}{4})$;

4. Составьте и решите уравнение:

а) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = sin^2 x$, $g(x) = cos\ x + cos\ \frac{\pi}{12}$

б) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = cos^2 x$, $g(x) = sinx - sin\ \frac{\pi}{10}$

5. Найдите $f'(x_0)$, если

а) $f(x) = (x^2 - 3x - 4)^5 - sin\pi x$; $x_0=1$

б) $f(x) = \frac{1}{cos^3 \frac{x}{3}}$; $x_0 = -3\pi$

в) $f(x) = \sqrt{ctgx}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$

.

6. Найдите значение аргумента, удовлетворяющее условию $f'(x) = g'(x)$, если

а) $f(x) = \sin(2x - 3)$; $g(x) = \cos(2x - 3)$

б) $f(x) = ctgx$; $g(x) = 2x + 15$

7. Дано: $f(x) = asin2x + bcosx$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $f'\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -4$.
Чему равны a и b?

8. Докажите, что при всех допустимых значениях x верно равенство:

а) для $f(x) = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ и $g(x) = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$

$f'(x)g'(x) = -f(x) \cdot g(x)$

б) для $f(x) = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$ и $g(x) = \frac{sin2x}{1-cos2x}$

$\frac{1}{f''(x)} - \frac{1}{g''(x)} = 1$

9. С помощью стрелок составьте верное соотношение:

arcsin′x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos′x	$\frac{1}{1+x^2}$
arctg′x	$-\frac{1}{1+x^2}$
arcctg′x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. Вычислите производные функций:

а) $f(x) = \frac{arctgx}{x}$;

б) $f(x) = x \cdot arcsin\frac{x}{2}$;

в) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot arcctg$;

г) $f(x) = \sqrt{x} \cdot arccos\sqrt{x}$

3.6. Применение производных к исследованию функции

1. Критической точкой функции называется

.

2. Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2$

б) $f(x) = 2sinx - x$

в) $f(x) = 12x - x^3$

г) $f(x) = x + \sqrt{2}cosx$

д) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7$

е) $f(x) = sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}}$

ж) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

з) $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x}$

3. Сформулируйте признаки монотонности функции.

4. Сформулируйте теорему Дарбу.

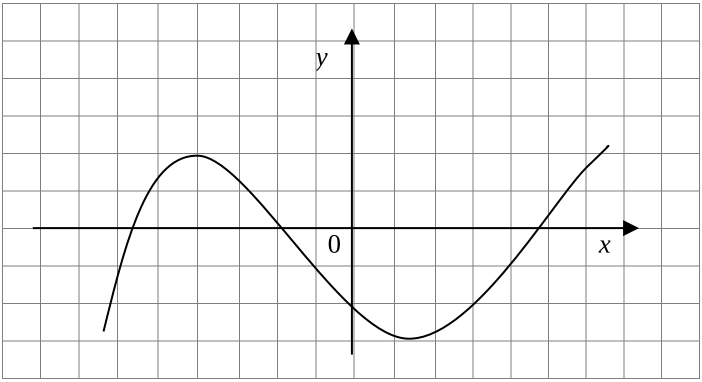
5. Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является:
а) возрастающей, если $\mathrm{g}(x) = 2x^5 + 4x^3 + 3x$

;

б) убывающей, если $\mathrm{g}(x) = 5 - 2x - x^3 - 4x^7$

.

6. На рисунке изображен график производной некоторой функции. Определите промежутки возрастания и убывания данной функции.



7. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

б) $f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$

;

в) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+4}$

;

г) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-4}$

;

д) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$

;

е) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

.

8. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.

9. Точка x_0 называется точкой максимума функции

10. Точка x_0 называется точкой минимума функции

11. Определите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$

б) $f(x) = 35x^7 - x^5 + 1$

в) $f(x) = (x + 1)^2(x + 5)^2$

г) $f(x) = (x+3)^2(x-5)^2$

д) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

е) $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

ж) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$

з) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

и) $f(x) = sin^2x - cosx$

к) $f(x) = 2sinx + cos2x$

12. Запишите алгоритм исследования функции на экстремумы.

____
____
____
____

13. При каком значении m функция $f(x) = x^2\sqrt{m - x}$ имеет экстремум в точках x=0 и x=6?

____
____
____
____

14. На рисунке изображен график производной некоторой функции, определенном на промежутке (-11,3)

Определите:

а) промежутки возрастания и убывания функции:

$f(x)$ ↗ при x____

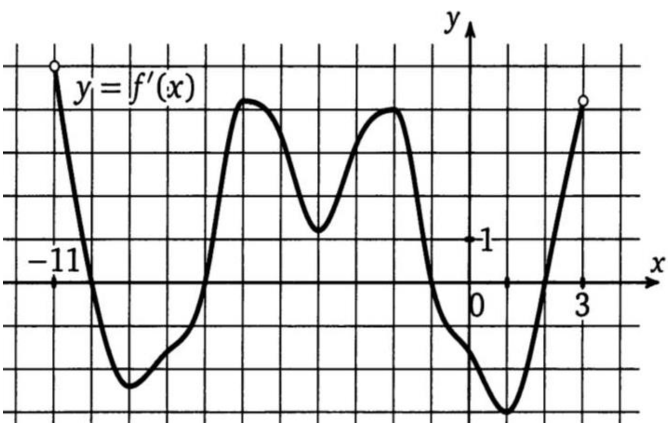
$f(x)$ ↘ при x____

б) точки минимума функции_______________________________

в) точки максимума функции______________________________

г) количество промежутков убывания функции______________

д) количество интервалов возрастания функции_____________



ТЕМА 4. ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. Определение первообразной. Основное свойство первообразной. Правила вычисления первообразной

1. Задайте формулой хотя бы одну функцию f, если:

а) $f'(x) = 3 - \frac{3}{sin^2 x}$; $f(x)$=____________________________________

б) $f'(x) = 2x - 2\sqrt{x}$; $f(x)$=____________________________________

в) $f'(x) = 4x - \frac{5}{3x^2}$; $f(x)$=____________________________________

г) $f'(x) = \frac{7}{cos^2 x} - 3sinx$; $f(x)$=________________________________

д) $f'(x) = 5 + \frac{1}{5}cosx$; $f(x)$=____________________________________

2. Запишите определение первообразной.

____

____

3. Докажите, что функция $y=F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$, если:

а) $F(x)=x^{11}$; $f(x)=11x^{10}$

____

б) $F(x)=x^7+x^9$; $f(x)=7x^6+9x^8$

____

в) $F(x)=3sinx$; $f(x)=3cosx$

____

г) $F(x)=x^2-cosx$; $f(x)=2x+sinx$

____

д) $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

____

е) $F(x) = \frac{1}{cos^2 x} + \frac{1}{sin^2 x}$; $f(x) = tgx - ctgx$

____

4. Сформулируйте основное свойство первообразной.

____

5. Найдите общий вид первообразной для функций:

а) $f(x)=cosx$

;

б) $f(x)=sinx$

;

в) $f(x)=\frac{1}{x^5}$

;

г) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

;

д) $f(x)=\frac{x^7-x^5}{x^5}$

.

6. Запишите правила вычисления первообразных.

7. Для функции f найдите первообразную F, принимающую заданное значение в указанной точке

а) $f(x)=(x-8)^3$; $F(8)=1$

б) $f(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$; $F(9)=9$

в) $f(x)=(x+4)^2$; $F(-4)=3$

г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $F(4)=4$

д) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2$; $F(-1)=0$

е) $f(x) = tgx \cdot ctgx - 2cos\frac{x}{2}$; $F(2\pi) = 2\pi$

ж) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{5-2x}} + 4x$; $F(2)=6$

з) $f(x) = 6x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2-\frac{x}{3}}}$; $F(3)=55$

и) $f(x) = \frac{6}{(4-3x)^2}$; $F(1,5)=1$

к) $f(x) = \frac{4}{(3-0,5x)^2}$; $F(-2)=5$

8. Дано:

а) $f(x) = 6x^2 - 3x - 2,5$; $F(-1) = 3$, найдите $F(-2)$

б) $f(x) = 3x^2 - \frac{x}{2} - 5$; $F(-2) = 5$, найдите $F(-1)$

9. Дано:

а) $f(x) = cosx$, $F(x) + C$ – ее первообразная,

$g(x) = F(x) + C - f'(x)$ и $g(0) = 2$.

Решите уравнение $g(x) = 0$.

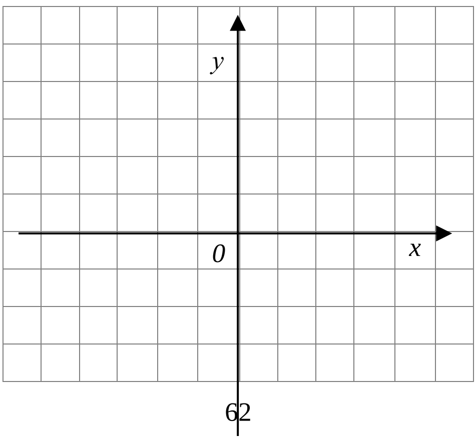
б) $f(x) = sinx$; $F(x) + C$ – ее первообразная,

$g(x) = F(x) + C - f''(x)$ и $g(0) = 0$.

Решите уравнение $g(x) = 0$.

10. Дана функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$.

Постройте график функции $y=F(x)$, если $F(-3)=0$.



11. Для данной функции найти первообразную, график которой проходит через данную точку:

а) $y = \sin x$; $M\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{4}\right)$

___

___

___

б) $y = cosx$; $M\left(\frac{\pi}{6};\ 1\right)$

___

___

___

в) $y = \frac{1}{cos^2 x}$; $M\left(\frac{\pi}{4};\ -1\right)$

___

___

___

г) $y = \frac{1}{sin^2\frac{x}{3}}$; $M\left(\frac{3\pi}{4};\ 0\right)$

___

___

___.

12. Найдите множество всех первообразных для функций:

а) $f(x) = \frac{4}{x^3} - (1 - 2x)^3$; $F(x) =$ ___

___

б) $f(x) = x + \frac{2}{cos^2\frac{x}{2}} - 1$; $F(x) =$ ___

___

в) $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{6})$; $F(x) =$ ___

___

г) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3})$; $F(x) =$ ___

___

д) $f(x) = \frac{7}{2\sqrt{3-\frac{x}{2}}} + \frac{1}{(x-2x)5}$; $F(x) =$ ______________________________

____

е) $f(x) = 8sin\frac{x}{4}cos\frac{x}{4}$; $F(x) =$ ______________________________

____

ж) $f(x) = cos^2\frac{x}{8} - sin^2\frac{x}{8}$; $F(x) =$ ______________________________

____

з) $f(x) = \frac{10}{(10x+2)^4} - \frac{3}{sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$; $F(x) =$ ______________________________

____

и) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{5-12x}} + cos3x$; $F(x) =$ ______________________________

____

к) $f(x) = 6\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + \sqrt{2x-13}$; $F(x) =$ ______________________

____

13. Множество всех преобразований для функции *f*(*x*) называется ____
и обозначается ____

14. В записи $\int f(x)dx$ *f*(*x*) – ____________________;
$f(x)dx$ – ____________________;
dx – ____________________.

15. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int 4sinxdx$ ____

б) $\int -\frac{9}{cos^2x}dx$ ____

в) $\int 6cosxdx$ ____

г) $\int -\frac{16}{sin^2x}dx$ ____

д) $\int \frac{3}{2\sqrt{x}}dx$ ____

е) $\int -\frac{15}{x^2}dx$ ____

ж) $\int (x^2 + sinx)\, dx$ ______________________________________

з) $\int \left(-\frac{1}{x^2} + x^5\right) dx$ ______________________________________

и) $\int (2 - 9x)^6 dx$ ______________________________________

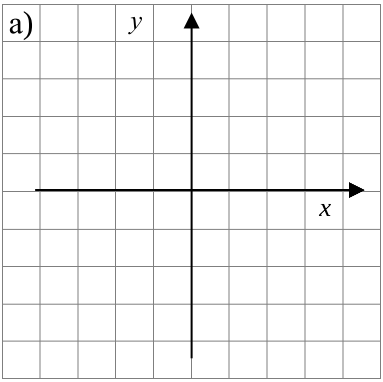
к) $\int \frac{2}{(2x+5)^3} dx$ ______________________________________

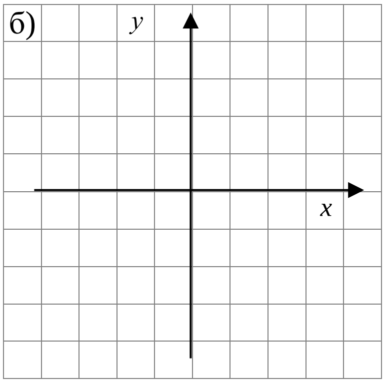
4.2. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл

1. Изобразите фигуры, ограниченные линиями

а) $f(x) = -\frac{1}{x}$; $x = -1$; $x = -2$; $y = 0$;

б) $f(x) = 4 - x^2$; $y = 0$;





2. Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную ______________________________________

____.

3. Какие линии необходимы для существования криволинейной трапеции?

____

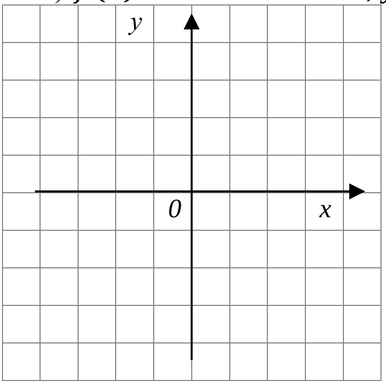
4. Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле: ______________________________________,

где $F(a)$ – ____;

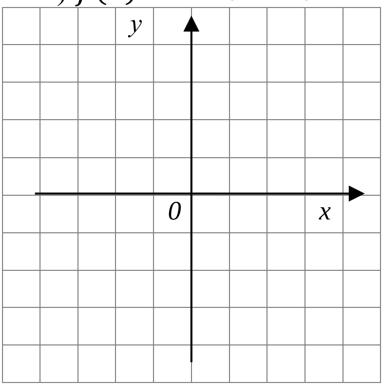
$F(b)$ – ____.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; y=0



б) $f(x) = x^2 + 4x + 10 = 0;\ x = 0;\ y = 0;\ x = -3$



6. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.

7. Вычислите:

а) $\int_{-1}^{2}(x^2 - 6x + 9)dx$ ______________________________

б) $\int_{-3}^{1}(x^2+4x+4)dx$ ________________________________

____

____

в) $\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{(1-6x)^2}dx$ ________________________________

____

____

г) $\int_{0}^{2}\frac{1}{(2x-1)^2}dx$ ________________________________

____

____

д) $\int_{\frac{5}{3}\pi}^{3\pi}cos0{,}5x\,dx$ ________________________________

____

____

е) $\int_{0}^{\pi}sin\frac{x}{3}dx$________________________________

____

ж) $\int_{-1}^{0}\sqrt{4+3x}dx$ ________________________________

____

____

з) $\int_{0}^{4}\sqrt{2x+1}dx$ ________________________________

____

____

8. При каком значении a и b выполняется равенство:

а) $\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{1-2x}{3}dx=-\frac{4}{3}$

____

____

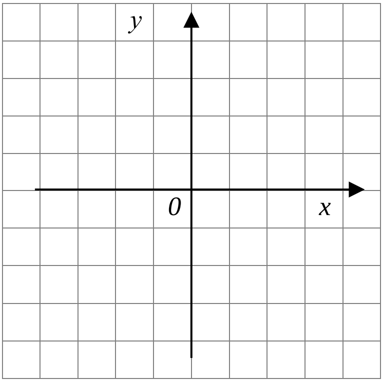
б) $\int_{\frac{b}{2}}^{b}\frac{1+2x}{4}dx=2{,}5$

____

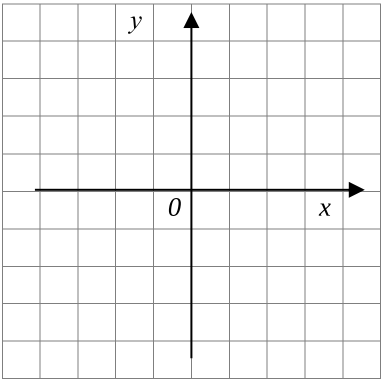
____.

11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $f(x) = sinx$; $f(x) = cosx$; $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \pi$



б) $f(x) = sinx$; $f(x) = cosx$; $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$



ТЕМА 5. СТЕПЕНИ И КОРНИ

5.1. Корень n-степени. Степень с действительным показателем

1. Запишите свойства степени с действительным показателем и корня n-степени.

а) $a^m \cdot a^n =$ ______________

б) $\frac{a^m}{a^n} =$ ______________

в) $(a^m)^n =$ ______________

г) $a^{-m} =$ ______________

д) $(ab)^m =$ ______________

е) $\left(\frac{a}{b}\right)^m =$ ______________

а) $\sqrt[n]{ab =}$ ______________

б) $\sqrt[n]{a^k} =$ ______________

в) $\sqrt[nk]{a^k =}$ ______________

г) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k =$ ______________

д) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a} =}$ ______________

е) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} =$ ______________

2. Сформулируйте определение корня n-степени, арифметического корня n-степени.

____

____

____

____

3. Сформулируйте определение степени с рациональным показателем.

____

____

4. Используя калькулятор, с точностью до сотых вычислите $5^{\sqrt{2}}$.

____

____

5. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[4]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{0,5}}$;

____

____;

б) $\frac{\sqrt[4]{6-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{6+3\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$;

____

____;

в) $9^{1,5}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}+\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5}\cdot(1,2)^{4,5}$;

____

____;

г) $4^{2,5}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5}+\left(\frac{5}{4}\right)^{3,5}\cdot(0,8)^{\frac{7}{2}}$;

____

____;

д) $\left(4\cdot\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}+3\cdot\left(\frac{1}{0,125}\right)^{-1}\right)^{-1}$;

____

____;

е) $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}\cdot 81^{2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{4}+\left(\frac{1}{6}\right)^{-4}}{225}$;

____

____;

6. Даны положительные числа a и b, функция $f(x)$. Сравните $f(a)$ и $f(b)$, если:

а) $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}$, $a>b$

____

____

б) $f(x)=\frac{x^{\sqrt{3}}}{x}$, $a<b$

____

____;

в) $f(x) = x^{\alpha}$, $a > b$, $0<\alpha<1$

____

____;

г) $f(x) = x^{\alpha}$, $a < b$, $\alpha<0$

____

____.

7. Упростите выражение и вычислите его при заданном значении параметра:

а) $\left(\left(\frac{5\sqrt{b^3}}{b\left(\sqrt[3]{5}\right)}\right)^{-3/2} + \left(\frac{b\sqrt[8]{125}}{\sqrt{b}}\right)^{-2}\right) : \left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{5}\right)$ при $b = \frac{1}{12}$;

____

____

____

____

____;

б) $\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{-8}}{4\left(\sqrt[3]{3a}\right)^{-9}} - \left(\sqrt{3a}\right)^{-2}\right) : \left(\frac{\left(a+\sqrt{2}\right)^{2}}{12a\left(a-\sqrt{2}\right)^{-2}}\right)$ при $a = \sqrt{7}$;

____

____

____

____

____.

8. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $0{,}3^{\pi}$; $0{,}3^{0{,}5}$; $0{,}3^{\frac{2}{3}}$; $0{,}3^{3{,}1415}$

____;

б) $\sqrt{2^{\pi}}$; $1{,}9^{\pi}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$; π^{π}

____;

в) 5^{-2}; $5^{-0,7}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

____;

г) $0,5^{-\frac{2}{3}}$; $1,3^{-\frac{2}{3}}$; $\pi^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt{2}^{-\frac{2}{3}}$

____;

д) $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$; $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$; $\sqrt[6]{100}$

____;

е) $\sqrt[5]{3\sqrt{4}}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}$

____;

ж) $\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$; $\sqrt[10]{25}$

____;

з) $\sqrt[16]{64}$; $\sqrt[48]{7\sqrt{7}}$; $\sqrt[4]{2\sqrt{1,25}}$

____.

9. Дано:

а) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$; $g(x) = x^{-2}$, докажите, что $f(16x^8) = 2(g(x)^{-1})$

____

____

____;

б) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; $g(x) = x^{-3}$, докажите, что $f(27x^3) = 9(g(x))^{-2}$

____

____

____.

10. Решите уравнение $g'(x) = 0$, если:

а) $g(x) = 2\sqrt{x} - x$

____

____

____;

б) $g(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} + 2x$

____

____;

в) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x$

____

____

____;

г) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - 2x$

____

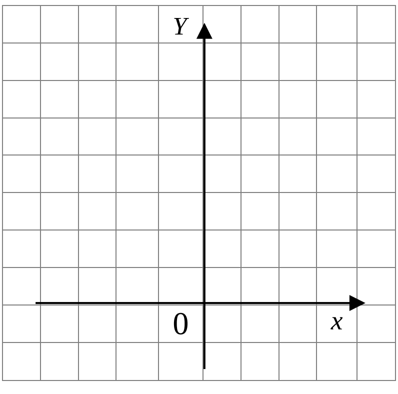
____

____.

5.2. Показательная функция, ее свойства и график

1. В одной и той же системе координат постройте графики функции. Сделайте вывод о том, как меняется график в зависимости от основания степени.

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



____

____

____

____

____

____

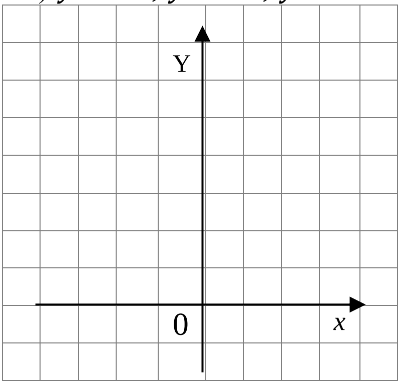
____

____

____

____

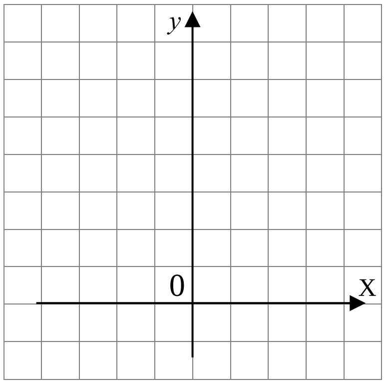
б) $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = 4^x$



2. Функция, заданная формулой $y = a^x$ ______________________

____

3. Постройте график показательной функции при $a > 0$ и $0 < a < 1$. Перечислить свойства показательной функции:



4. Найдите значение показательной функции $y = a^x$ при заданных значениях x:

а) $y = -7^x$; $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{1}{2}$

____

____;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = 1$; $x_3 = -\frac{1}{2}$

____

____;

в) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $x_3 = 5$

____

____;

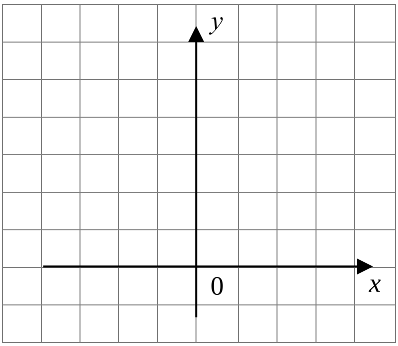
г) $y = \left(\frac{4}{9}\right)^x$; $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2{,}5$

____

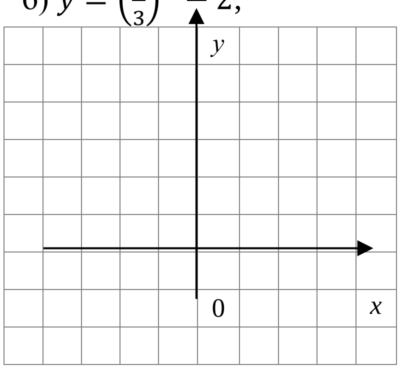
____.

5. Постройте графики функции:

а) $y = 2^x + 1$;



б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$;



6. Найдите значение аргумента *x*, при котором функция $y=f(x)$ принимает заданное значение.

а) $y = 2^x$; $y = 16$; $y = 8\sqrt{2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{32\sqrt{2}}$

____

____

б) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $y = \frac{1}{25}$; $y = 125$; $y = \frac{1}{25\sqrt{2}}$; $y = 625 \cdot \sqrt{5}$

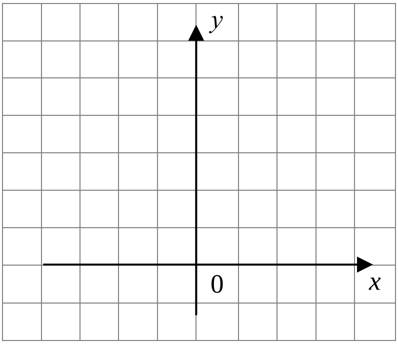
____

____.

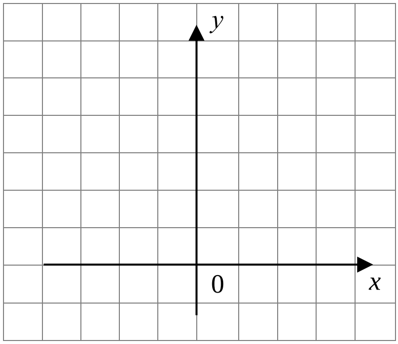
7. При каких значениях аргумента график заданной показательной функции лежит выше графика заданной линейной

функции:

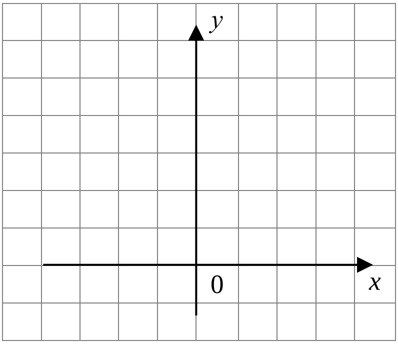
а) $y = 3^x$; $y = -x + 1$;



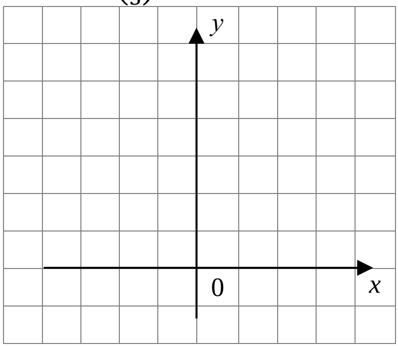
б) $y = 0{,}5^x$; $y = 2x + 1$;



в) $y = 0{,}5^x$; $y = 2x + 1$;



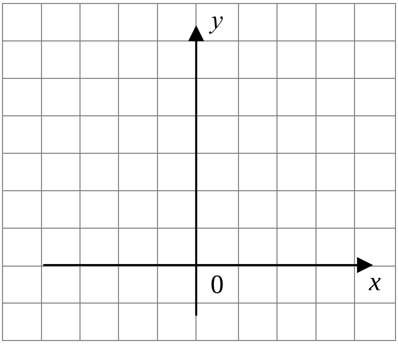
г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = x + 1$.

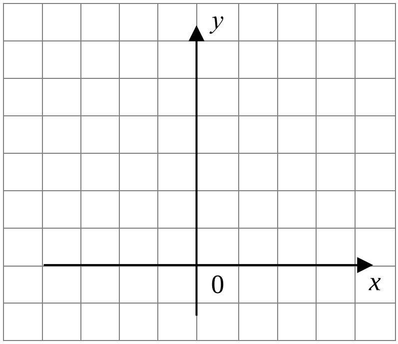


8. При каких значениях x график заданной показательной функции лежит ниже графика заданной линейной функции:

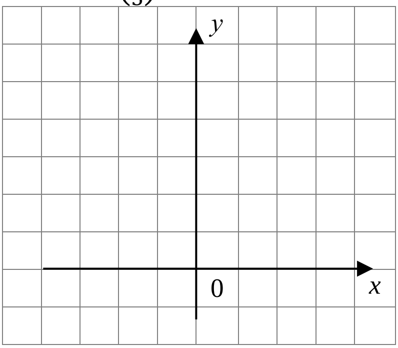
а) $y = 2^x$; $y = -\frac{3}{2}x - 1$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = -x - 2$;

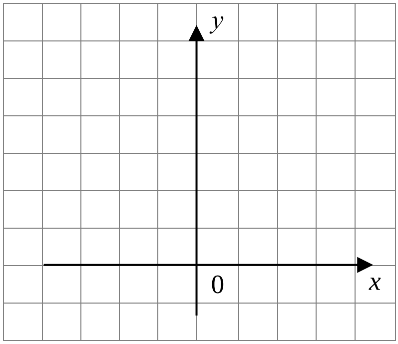




в) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $y = 3x + 1$;



г) $y = 3^x$; $y = -2x + 5$.



9. Найдите область определения функции:

а) $y = 4^{x^2-1}$

____

____;

б) $y = \frac{1}{2^x - 1}$

____

____;

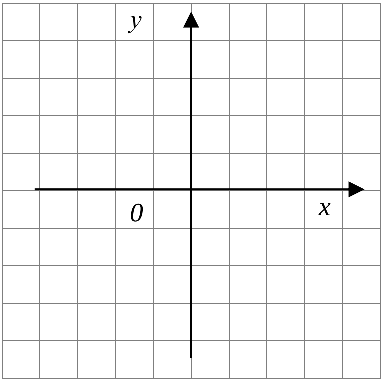
в) $y = \frac{2x+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 27}$

____.

10. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ если } x<0 ; \\ \sqrt{x} + 1, \text{ если } x \geq 0 . \end{cases}$$

Постройте график функции, вычислите $f(-5)$; $f(-2{,}5)$; $f(0)$; $f(4)$; $f(1{,}69)$.



5.3. Решение показательных уравнений

1. Простейшим показательным уравнением называют уравнения вида ______________________________

2. Докажите, что для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2^x$ выполняется равенство:

а) $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

б) $f(x + 1) \cdot f(2x) = 2f^3(x)$

в) $f(-2x) = \frac{1}{f^2(x)}$

г) $f(cos^2x) = \sqrt{2f(cos2x)}$

3. Решите уравнения. Какие из уравнений являются показательными?

а) $3x^2 = 27$

б) $\frac{4}{x^2} = 1$

в) $2^{x+1} = 16$

г) $\sqrt{4^{x+1}} = \sqrt{4}$

;

д) $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

е) $(x+1)^3 = 27$

4. Решите уравнения:

а) $\left(\frac{49}{16}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^9$

б) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{25}{9}\right)^{-3}$

в) $2^{x-1} = 2\sqrt{2}$

г) $3^{2x+5} = \frac{1}{3}$

д) $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

е) $\sqrt{10^{2x+6}} = \frac{10}{\sqrt[4]{10}}$

ж) $2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 7 \cdot 2^{-3}$

з) $5^{x+2} - 12 \cdot 5^{x-1} = 565$

и) $\left(\frac{28}{5}\right)^{28x^2-5} = \left(\frac{5}{28}\right)^{5x^2-127}$

к) $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

5. Найдите сумму и произведение абсцисс общих точек графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

а) $f(x) = 0{,}8^{x^2+\frac{1}{2}}$, $g(x) = (\frac{5}{4})^{-\frac{3}{2}x}$

б) $f(x) = 0{,}9^{x^2+1}$, $g(x) = \left(\frac{10}{9}\right)^{-\frac{5}{4}}$

в) $f(x) = 1{,}4^{x^2+1}$, $g(x) = \left(\frac{10}{14}\right)^{-\frac{7}{3}}$

6. При каких значениях x функции $f(x)$ не больше и не меньше числа b, если:

а) $f(x) = 3^{7x+2}$, $b = \frac{1}{243}$

б) $f(x) = 1{,}1^{5x+3}$, $b = \frac{100}{121}$

в) $f(x) = 2{,}75^{8x+2}$, $b = \frac{16}{121}$

7. Найдите значение x, при котором $f(x) = 0$, если:

а) $f(x) = 3^{x+9} \cdot 5^{4x} - 15^{2x+6}$

б) $f(x) = 2^{x+1} \cdot 3^{4x} - 9 \cdot 6^{2x}$

в) $f(x) = 10^{2x} + 9 \cdot 20^{x} - 10 \cdot 2^{2x}$

8. Найдите корень уравнения x_0, удовлетворяющий условию:

а) $10 \cdot 3^{\sqrt{3x^2-2x}} - 3 = 3 \cdot 9^{\sqrt{3x^2-2x}}$, $3x_0 + 1 > 0$

б) $17 \cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}} - 8 = 2 \cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$, $2x_0 + 10 \leq 8$

9. Найдите ординату общей точки графиков функций $y = 2^{3x-1} \cdot 3^{x-3}$ и $y = 4^{x+1}$.

10. Найдите наибольшее значение выражения $2x_0 + 2$, если x_0 – корень уравнения.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{2x+1} - 13\left(\frac{1}{13}\right)^{2x+2} = 13$$

5.4. Логарифмы, их свойства

1. Дайте определение логарифма.

2. Используя простейшее показательное уравнение $a^x = b$ $(a \neq 1; a > 0)$ и определение логарифма по основанию a, записать основное логарифмическое тождество.

3. При помощи стрелок составьте верное соответствие при условии, что $a > 0$; $a \neq 0$; $b > 0$; $x > 0$; $y > 0$.

$log_a a$	0
$log_a(x \cdot y)$	$log_a b$
$log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{1}{p} log_a b$
$log_a(x^k)$	$log_a x + log_a y$
$log_{a^k} b^k$	$log_a x - log_a y$
$log_a b$	$\frac{1}{log_b a}$
$log_a 1$	$k log_a x$
$log_{a^p} x$	1

4. Десятичным логарифмом называется ______________________
____.

5. Вычислите:

а) $log_{25}125 =$ _______________; б) $log_{27}729 =$ _______________;
в) $log_{\frac{1}{9}}3 =$ _______________; г) $log_4 \frac{1}{32} =$ _______________;
д) $log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6} =$ _______________; е) $log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4} =$ _______________;
ж) $log_3^2 9 =$ _______________; з) $log_{\frac{1}{32}}^2 4 =$ _______________;
и) $log_{0,5}^2 4 =$ _______________; к) $\sqrt{log_3 81} =$ _______________.

6. Найдите значение числового выражения

а) $3^{log_3 8} =$ ____
б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{log_{\frac{1}{4}}7} =$ ____
в) $12^{log_{12}1,3} =$ ____
г) $2^{3+log_2 9} =$ ____
д) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2+log_{\frac{1}{6}}20} =$ ____
е) $\left(\sqrt{7}\right)^{4+log_{\sqrt{7}}0,5} =$ ______________________________________

ж) $6^{\log_{1/\sqrt{6}} 2} =$ ______

з) $2^{\log_4 9} =$ ______

и) $4^{\log_2 \sqrt{7}} =$ ______

к) $7^{\log_{\sqrt{7}} 4} =$ ______

7. Вычислите:

а) $\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{\frac{1}{5}} 625 =$

б) $\log_{0,1} 0{,}005 - \log_{0,1} 0{,}05 =$

в) $\log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_3 9 : \log_7 \frac{1}{7} =$

г) $17^{\frac{1}{2}\log_{17} 3} + \sqrt{17} =$

д) $\log_{45} 5 + \frac{1}{\log_9 45} =$

е) $\sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 54 - \log_{\sqrt{3}} 18\sqrt{3} =$

ж) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27 =$

з) $(\log_{37} 5 + \log_{37} 7{,}4 - 4\log_2 5) : \log_{\frac{1}{3}} 81 =$

и) $(log_5 6 - log_5 12 + log_5 - 24) \cdot log_{12} 25 =$

____

____

к) $log_2(\sqrt{3} + 2) - 2log_2(\sqrt{3} + 1) =$

____

____

8. Прологарифмируйте выражение:

а) $125\sqrt{5a} \cdot b{:}\ \sqrt[3]{c^2}$ по основанию 5

____

____

б) $64\sqrt[3]{4}a^2{:}\ b^{-\frac{3}{7}}$ по основанию 4

____

____

в) $\left(\frac{a^5}{\sqrt[7]{b^3}}\right)^{-3}$ по основанию 3

____

____

9. Операцию, обратную логарифмированию называют

____

10. Найдите *x* по его логарифму:

а) $lgx = lglog_4 256 + lg2$

____

____

б) $log_{0,2} = log_{0,2} log_7 343 - log_{0,2} 4$

____

____

в) $log_{\frac{5}{12}} x = 2log_{\frac{5}{12}} - 5log_{\frac{5}{12}} 2$

____

____

г) $log_{61} x = log_{61} lg1000 + log_{61} 17$

____

____.

11. Вычислите:

а) $3log_2\frac{1}{8}+10^{lg2+lg5}$

б) $2log_3\frac{1}{27}+6^{log_6 72-log_6 2}$

в) $log_{0,6}(log_8 32)+49^{log_{\sqrt{7}}\sqrt{2}}$

г) $\frac{lg900-2}{2lg0,5+lg12}$

д) $3^{\frac{2}{log_5 2}}+\frac{log_2\frac{1}{3}}{log_4 81}$

12. Упростите выражение:

а) $\frac{lgb}{lga}+\frac{2}{log_b a}-log_a b^3$

б) $a^{2log_a b}-(log_a a^b)^2$

в) $\frac{3}{log_a b}-log_b a^2-\frac{log_3 a}{log_3 b}$

г) $log_b b^a-b^{2log_b\sqrt{a}}$

13. Найдите значение выражения:

а) $lgtg31^{\circ}lgtg59^{\circ}$

б) $lgctg42^{\circ} + lgctg48^{\circ}$

в) $\frac{log_3^2 6 - log_3^2 2}{log_3 12}$

;

г) $\frac{log_5^2 10 - log_5^2 2}{log_5 20}$

.

14. Известно, что

а) $log_3 2 = c$. Найдите $log_3 8$.

б) $log_{0,5} 3 = a$. Найдите $log_{0,5} 81$.

в) $log_5 2 = a$. Найдите $log_5 10$.

г) $log_6 4 = m$. Найдите $log_6 24$.

д) $log_6 42 = b$. Найдите $log_6 7$.

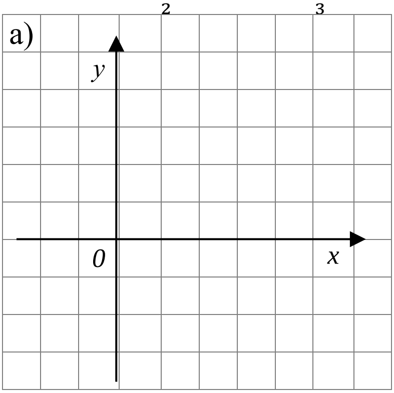
5.5. Логарифмическая функция, ее свойства и график

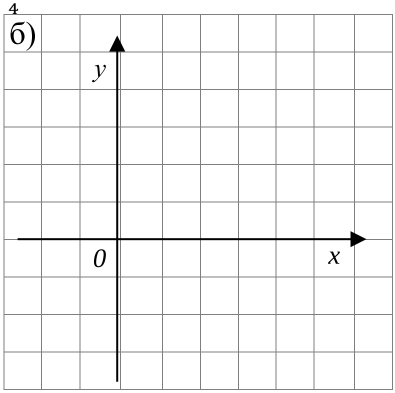
1. Логарифмической функцией с основанием a, называется ____.

2. В одной и той же системе координат постройте графики функций, если:

а) $y = log_2 x$, $y = log_3 x$, $y = log_4 x$;

б) $y = log_{\frac{1}{2}} x$, $y = log_{\frac{1}{3}} x$, $y = log_{\frac{1}{4}} x$.





Сделайте вывод об изменении графика функции в зависимости от основания логарифма:

при a>1 ____

при 0<a<1 ______________________________________

Перечислите общие свойства этих графиков.

____

____

____

____

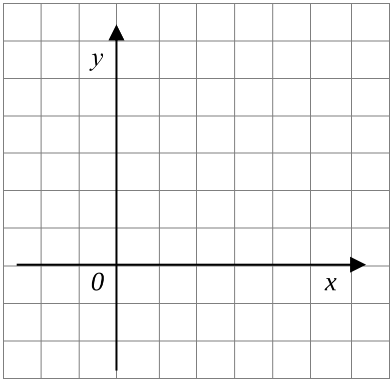
3. Сформулируйте основные свойства логарифмической функции, постройте график.

а) $D(f)$=____________________

б) $E(f)$= ____________________

в) при a>0 ________________

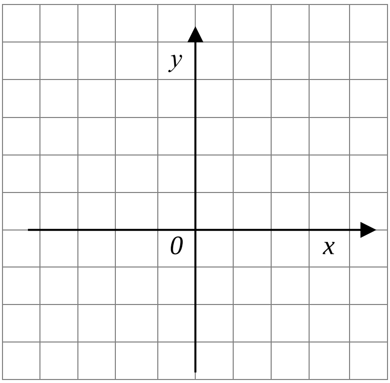
при 0<a<1 ______________

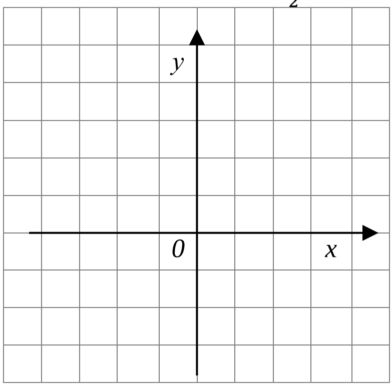


4. В одной и той же системе координат постройте графики функций:

а) $y = 2^x$; $y = log_2 x$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = log_{\frac{1}{2}} x$.





Постройте прямую $y = x$ и сделайте выводы о поведении графиков показательной и логарифмической функции с одинаковым основанием относительно прямой $y = x$.

____

____

____

5. Выясните, является ли функция возрастающей или убывающей:

а) $y = log_{0,075}x$ ______________________________

б) $y = log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x$ ______________________________

в) $y = lgx$ ______________________________

г) $y = log_{2,6}x$ ______________________________

д) $y = log_{\frac{3}{4}}x$ ______________________________

е) $y = log_{\sqrt{3}}x$ ______________________________

ж) $y = log_{0,9}x$ ______________________________

з) $y = log_{\pi}x$ ______________________________

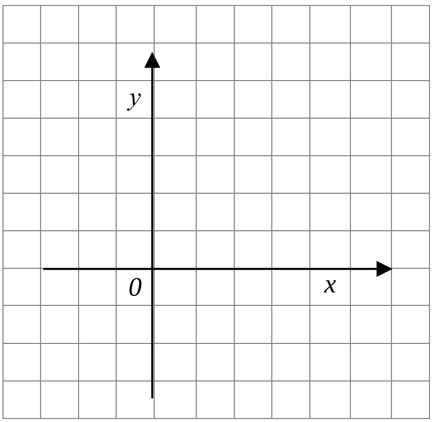
6. Схематично постройте графики следующих функций:

а) $y = log_7x$;

б) $y = lgx$;

в) $y = log_{\frac{75}{100}}x$;

г) $y = log_{\frac{1}{\pi}}x$.



7. Найдите область определения функции:

а) $y = log_4(x - 1)$

____

____;

б) $y = log_2(x^4 + 2x)$

в) $y = log_{0,3}(1 + x)$

г) $y = log_{\sqrt{2}}(4 - x^2)$

д) $y = log_3(x^2 - 3x - 4)$

е) $y = log_{0,7} \frac{x^2-9}{x+5}$

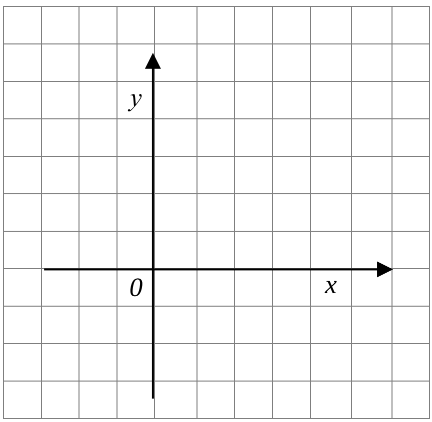
8. Выясните, является ли положительным или отрицательным число:

$log_3 4{,}5$ ________; $log_3 0{,}45$ ________; $log_5 25{,}3$ ________;

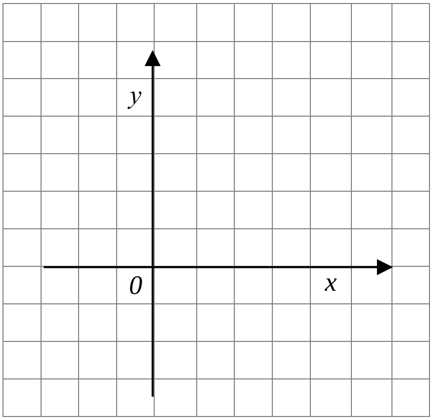
$log_5 2$ ________; $log_{\frac{1}{5}} 3$ ________; $log_3 \frac{1}{2}$ ________;

9. Постройте график функции, найдите ее область определения и множество значений:

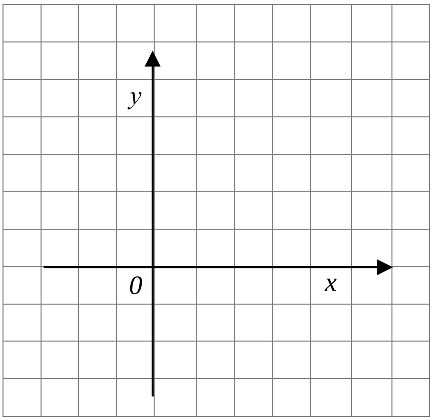
а) $y = log_3(x - 1)$



б) $y = log_{\frac{1}{3}}x - 1$



в) $y = 1 + log_3(x - 1)$



10. Найдите, при каком значении *x* значение функции *y*=*f*(*x*) равно *b*.

а) $y = log_{\frac{1}{3}}x$;

b=2 ______________________________;

b= –3 ______________________________;

$b = \frac{1}{2}$ ______________________________;

$b = -\frac{2}{3}$ ____.

б) $y = log_4 x$;

$b = -1$ ____;

$b = \frac{3}{2}$ ____;

$b = -\frac{1}{3}$ ____;

$b = 2\frac{1}{2}$ ____.

5.6. Логарифмические уравнения

1. Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида ____

2. Является ли уравнение логарифмическим?

а) $lg100 + xlg10 = 3$ ________________________________

б) $log_3 27 = 2x + 1$ ________________________________

в) $log_2(x-1) = log_2(3-2x)$ _________________________

г) $2log_{\frac{1}{2}} x = 4$ _____________________________________

3. Решите уравнения:

а) $log_2(3x-6) = log_2(2x-3)$

____

____

б) $log_{0,2}(12x+8) = log_{0,2}(11x+7)$

____

____

в) $log_3(x^2+6) = log_3 5x$

____

____

г) $lg(x^2-6) = lg(8+5x)$

____

____

д) $log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0$

е) $log_7(x^2 - 12x + 36) = 0$

ж) $log_2^2 x - 4log_2 x + 3 = 0$

з) $log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$

;

и) $log_2 x = log_2 3 + log_2 5$

;

к) $4log_{0,1} x = lg_{0,1} 2 + lg_{0,1} 8$

;

л) $log_3(x - 2) + log_3(x + 2) = log_3(2x - 1)$

;

м) $log_{23}(2x - 1) - log_{23} x = 0$

.

4. Известно, что $f(x) = log_3(5x - 2)$. Решите уравнение: $f(x) = f(3x - 1)$.

5. Известно, что $f(x) = log_2(8x - 1)$. Решите уравнение: $f(x) = f(\frac{x}{2} + 6)$.

6. Найдите решение уравнения:

а) $3x = \frac{\frac{1}{2}log_3 64 - 2log_3 2}{log_3 2}$

____

____

____;

б) $\left(\frac{x}{2} + 4\right) = \frac{2log_{0,5}2 + log_{0,5}\sqrt{10}}{log_{0,5}10 - log_{0,5}\sqrt{10} + log_{0,5}4}$

____

____

____.

7. Пусть x_0 – наибольший корень уравнения:

а) $lg(2x^2 - 5x) = lg(15x - 12)$, найдите $7 - \frac{1}{7}x_0$

____

____;

б) $lg(3x^2 + 12) = lg(x^2 - 10x)$, найдите $4 + \frac{1}{2}x_0$

____

____;

в) $lg(3x^2 + 16) = lg(x^2 - 12x)$, найдите $\frac{1}{2}x_0 + 5$

____

____.

8. Найдите сумму и произведение абсцисс всех общих точек графиков функций $f(x)$ и $g(x)$.

а) $f(x) = 13^{log_{13}(x-7)}$, $g(x) = x^2 - 14x + 49$

____

____;

б) $f(x) = log_\pi(x^2 + 3x)$, $g(x) = log_\pi(8 + x)$

____

____;

в) $f(x) = \lg(x^2 - 3x)$, $g(x) = lg(3x + 7)$

____

____.

9. Найдите наименьший корень уравнения:

а) $3log_4x - x \cdot log_4x = x - 3$

____

____;

б) $log_8(3x - 5) = \frac{1}{3} - log_8x$

____

____;

в) $\frac{2}{log_4(x+1)} = \frac{log_4(x+1)^4}{0,5}$

____

____.

10. Решите уравнение $f(x) = f(x^2 - 2)$, если $f(x) = log_5(2x - 3)$.

____

____

ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

6.1. Производная показательной функции. Число е

1. $\alpha = 45^{\circ}$, тогда $tg\alpha =$ ________________________________.

2. При каком значении a показательная функция $y = a^x$ при $x = 0$ имеет производную, равную 1?

____

3. Дайте определение числа e.

____

____

____

4. Какая функция называется экспонентой? Чему равна производная этой функции?

____

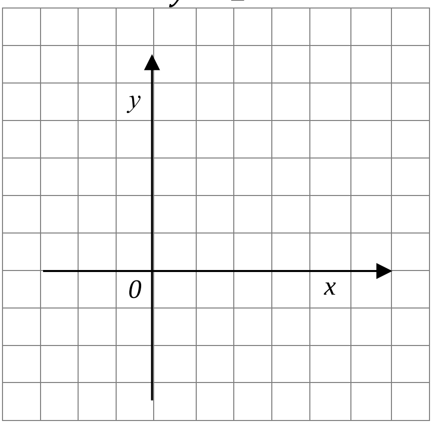
5. В основании натурального логарифма лежит число _____.

6. Представьте a^x в виде степени с основанием e.

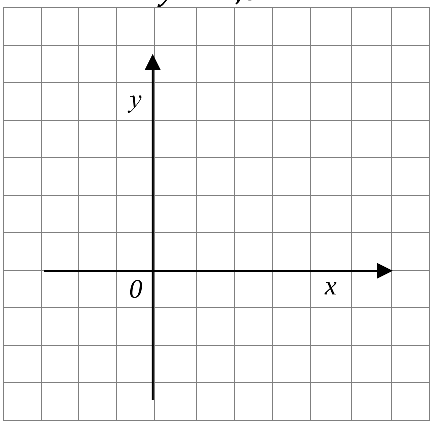
____

8. Постройте графики функций:

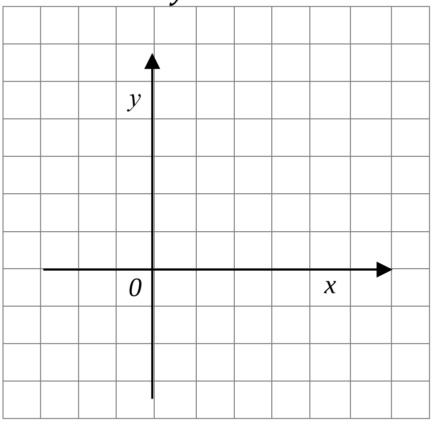
$y = 2^x$



$y = 2{,}5^x$



$y = 3^x$



К каждому графику проведите касательные в точке x=0. Как меняется угол наклона касательной к оси O_x?

---

9. Найдите производную функции

а) $f(x) = 3e^x - 3^x$

б) $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + 0{,}5^{-x}$

в) $f(x) = 2^x + 2e^x$

г) $f(x) = e^{x^2-x} - 0{,}2^{-x}$

д) $f(x) = sine^{\sqrt{x}} - 2^{2x-x^2}$

е) $f(x) = cose^{x^2-x} + 3^{\sqrt{2x+1}}$

ж) $f(x) = e^{arctgx} \cdot (1 + x^2)$

з) $f(x) = e^{tgx} \cdot cos^2 x$

и) $f(x) = 2^{cosx+1} \cdot e^{\sqrt{3+x}}$

к) $f(x) = \frac{e^{3+2x}}{\cos(3-2x)}$

10. Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = x \cdot e^{1-2x^2}$

б) $f(x) = x^2 e^{2x-1}$

в) $f(x) = \frac{1}{x^2 e^x}$

г) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$

6.2. Производная логарифмической функции

1. Имеет ли функция $y = log_a x$ производную в каждой точке своей области определения? Ответ обоснуйте.

____

____

2. $ln'x =$ ______ . Какие правила, теоремы использованы для доказательства данного равенства?

____

____

3. Докажите, что $ln'x = \frac{1}{x}$.

____

____

4. Используя формулу перехода от одного основания логарифма к другому, докажите, что $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$.

____

____

5. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2ln(x+1)$

____

____

б) $f(x) = 2 - lgx$

____

____

в) $f(x) = -3ln\frac{x+1}{3}$

____

____

г) $f(x) = log_2 cosx$

____

____

д) $f(x) = lg\,\frac{x}{x+2}$

____

е) $f(x) = ln\frac{3x^2+2}{x^2+1}$

ж) $f(x) = x^{lnx}$

з) $f(x) = log_x e^x$

и) $f(x) = \frac{x^2}{lnx}$

к) $f(x) = \frac{x}{ln^2 x}$

6. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = ln(x^2 + 4)$

б) $f(x) = lnx^3 + \frac{6}{x}$

в) $f(x) = ln\frac{1}{x} - \frac{3}{x}$

7. Найдите точки экстремума функции $y = f'(x)$, если $f(x) = 0{,}5x^2 + 4lnx + 5$.

8. Определите, при каких значениях x верно равенство:

а) $(ln(x^2 - x - 2))' = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$

б) $(ln(3 - 2x - x^2))' = -\frac{2x+2}{3-2x-x^2}$

9. Определите, совпадает ли область определения функции $g(x)$ с областью определения ее производной, если $g(x) = ln(9x^2 + 6x + 1)$.

6.3. Первообразная показательной функции

1. Теорема: Первообразной для функции a^x на R является функция $\frac{a^x}{lna}$. Доказательство:

.

2. Найдите две различные первообразные для функции $g(x)$ и укажите, график какой из них лежит выше, если:

а) $g(x) = e^{7-3x} - 0{,}5^{-x}$

;

б) $g(x) = e^{4x-3} + 0{,}1^{-x}$

.

3. Докажите, что функция $ln|x|$ является первообразной для функции $\frac{1}{x}$ при $x \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = e^{x}(xe^{-x} - e^{5-3x})$

б) $f(x) = e^{-x}(e^{4-x} - x^{3}e^{x})$

в) $f(x) = (5^{-x} - 0{,}1^{-x}) \cdot (5^{-x} + 0{,}1^{-x})$

г) $f(x) = (0{,}5^{-x} - 3^{-x})(0{,}5^{-x} + 3^{-x})$

д) $f(x) = 2^{3x-4} + \frac{3}{3x-4}$

е) $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}} - \frac{5-6x^2}{x}$

ж) $f(x) = \frac{3}{2x-5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}} + 5^{3-x}$

з) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}-2^{x-2}$

и) $f(x)=\frac{8^x}{2^{x+2}}-\frac{1}{x+2}$

к) $f(x)=\frac{x-5}{x^2-25}+e^{2x+10}-5^{2x+10}$

5. Определите, совпадает ли область определения функции $g(x)$ с областью определения ее первообразной, если $g(x)=\frac{1}{8-x}+\frac{1}{\sqrt{4-0{,}5x}}$.

6. Найдите первообразную $F(x)$, если:

а) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2x+1}$, $F(0)=3$

б) $f(x)=e^{\frac{x}{3}}-\frac{1}{1-0{,}5x}$, $F(0)=-1$

7. Для функции $g(x)$ найдите первообразную, которая в точке

x_0=0 принимала бы такое же значение, как и производная $g(x)$ в этой точке:

а) $g(x) = e^{2x} + \frac{1}{2x+1}$

____

____

____

б) $g(x) = e^{-3x} - \frac{1}{3x+1}$

____

____

____

8. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^{-1} 3^x dx$

____;

б) $\int_1^2 2^x dx$

____

в) $\int_2^4 0{,}5e^{\frac{x}{2}} dx$

____

г) $\int_3^6 \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} dx$

____

д) $\int_0^1 (e^{-x} + 1)^2 dx$

____

е) $\int_0^1 (e^{-x} - 1)^2 dx$

____

ж) $\int_{-2}^{-1} 10^x 2^{-x} dx$

____

з) $\int_{-3}^{-1} 3^{-x} 6^x dx$

____

и) $\int_{ln2}^{ln3} e^{-3x}\, dx$

к) $\int_0^1 \frac{2^x+3^x}{6^{x+1}}dx$

л) $\int_{ln3}^{ln5} e^{5x}dx$

м) $\int_0^1 \frac{2^{x+1}+5^{x+1}}{10^x}dx$

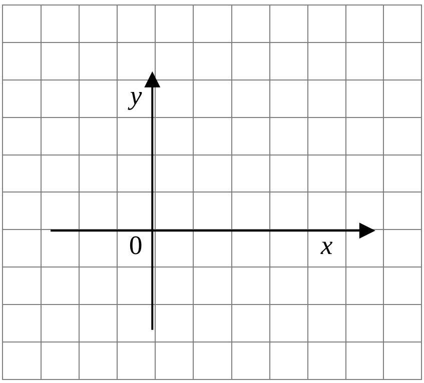
н) $\int_e^{e^2} \frac{2}{x}dx$

о) $\int_0^6 \frac{dx}{0,5x+1}$

9. При каком значении a $\int_{0,5a}^{a} e^{2x}dx = 1$?

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функции:

а) $y = e^{-x}$; $y = e^x$; $y = e$; $x = e$



б) $y = \frac{2}{x}$; $y = 2$; $x = \frac{1}{e^2}$