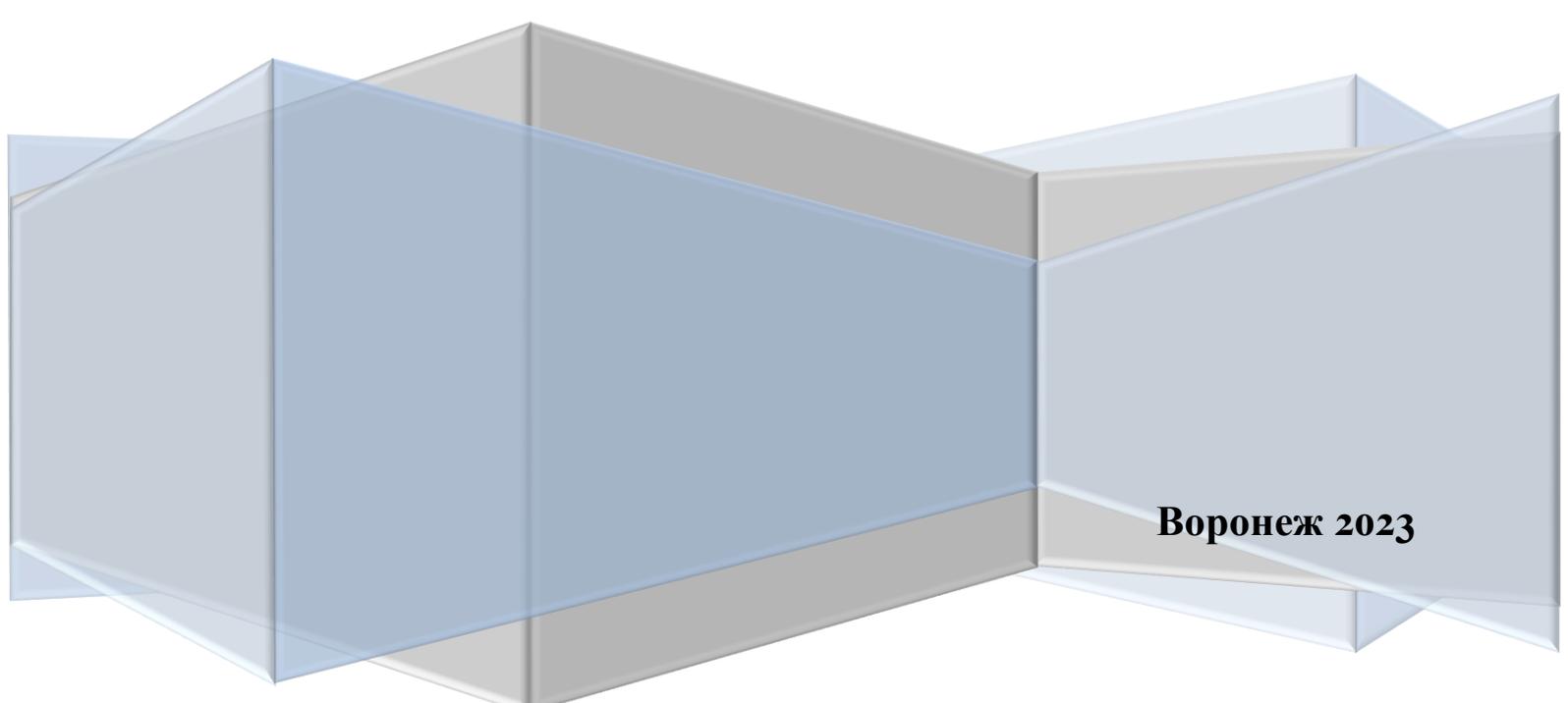


**МИНИСТЕРСТВО СПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
СПОРТА
КОЛЛЕДЖ**

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Землянко А.В.



Воронеж 2023

ББК 22

З-53

Решением Ученого совета ФГБОУ ВО «Воронежская государственная академия спорта» от 28 ноября 2023 г., протокол № 4, издание рекомендовано в качестве учебно-методического пособия для студентов 2 курса специальностей 49.02.02 «Адаптивная физическая культура», 49.02.01 «Физическая культура» колледжа ВГАС.

Рецензенты:

Гущина В.И. преподаватель первой категории филиала РГУПС в г. Воронеже

Сергатских Е.А., преподаватель первой категории колледжа ФГБОУ «ВГАС»

Сборник задач по математике / А.В. Землянко – Воронеж: Воронежская государственная академия спорта, 2023. - 48 С.

Сборник задач по математике представляет собой задачник по некоторым разделам дискретной математики, а также содержит задачи по теории вероятностей, математической статистики и действиям с приближенными числами. Сборник может быть использован в учебном процессе при проведении практических занятий, подготовке к зачету, а также будет полезен студентам, самостоятельно изучающим предмет.

Введение

Настоящее учебное пособие представляет собой задачник по таким разделам дискретной математики как теория множеств, математическая логика, комбинаторика, а также содержит задачи по теории вероятностей, математической статистики и действиям с приближенными числами.

Задачник предназначен для студентов 2 курса колледжа специальностей «49.02.01. Физическая культура» и «49.02.02. Адаптивная физическая культура» и соответствует требованиям ФГОС среднего профессионального образования

Задачник состоит из шести разделов.

В первом разделе представлены задачи на теорию множеств. Студентам предлагаются задачи на операции над множествами, изображение различных множеств на числовой оси и кругами Эйлера, текстовые задачи.

Во втором разделе рассматриваются задачи на математическую логику. В него включены задания на выявление логических связей и составление сложных высказываний, перевод высказываний с естественного языка на формальный и наоборот. Большое внимание уделяется составлению таблиц истинности логических формул.

Третий раздел содержит задачи на элементы комбинаторики. Он охватывает задачи на подсчет числа перестановок, сочетаний и размещений.

Четвертый раздел относится к теории вероятностей. В нем приводятся задачи о выборе объектов из набора, а также задачи на пересечение, объединение, частоту событий.

Пятый раздел посвящен некоторым вопросам математической статистики. В нем рассматриваются задачи на вычисление средних и вариационных характеристик выборки, задачи на построение полигона и гистограммы выборки.

Шестой раздел охватывает задачи, относящиеся к действиям над приближенными числами. В разделе находятся задачи на вычисление суммы, произведения и частного приближенных чисел с указанием их погрешностей, задачи на вычисление абсолютной и относительной погрешности.

Сборник содержит задачи разного уровня сложности, предназначенные как для первоначального знакомства с основными понятиями, утверждениями и алгоритмами дискретной математики, так и для более глубокого изучения предмета.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ	5
1.1. Элементы множества. Способы задания множества. Подмножества	5
1.2. Операции над множествами. Круги Эйлера	6
1.3. Решение текстовых задач с помощью кругов Эйлера-Венна	8
Раздел 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ	9
2.1. Определение высказываний, выявление логических связей	9
2.2. Перевод с естественного языка на формальный	10
2.3. Перевод с формального языка на естественный	11
2.4. Нахождение значения истинности высказываний, доказательство тождественной истинности или ложности формул	12
2.5. Решение задач с применением логических формул и таблиц истинности	13
Раздел 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ	13
3.1. Правила суммы и произведения	13
3.2. Перестановки	14
3.3. Сочетания	15
3.4. Размещения	16
3.5. Разные задачи	17
Раздел 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	18
4.1. Задачи о выборе объектов из набора	18
4.2. Задачи на пересечение, объединение, частоту событий	19
Раздел 5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	20
Раздел 6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ	21

Раздел 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. 1. Элементы множества. Способы задания множества. Подмножества.

1. Дано множество $X = \{\text{я, ю, э, ь, ы, ь, щ, ш, ч, ц, х, ф, у, т, с, р, п, о, н, м, л, к, й, и, з, ж, ё, е, д, г, в, б, а}\}$. Каким способом задано это множество? Задайте это множество другим способом. Какова мощность этого множества? Определить, принадлежат ли этому множеству элементы: $k, 2, o, m, n, 15, \text{й}, D, i, a, z, \text{ж}, 150, j, \text{ф}, \text{ц}$.

2. Задайте следующие множества двумя способами:

а) X – множество делителей числа 36;

б) A – множество чисел, кратных 6 и меньших 30. В каком отношении находятся данные множества?

3. Пусть $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -8 < x < 35\}$

Составьте такое подмножество множества A , в котором каждый элемент:

а) простое число;

б) число, оканчивающееся цифрой 6;

в) число, записанное одинаковыми цифрами.

г) натуральное число;

д) отрицательное число.

4. Для множества $A = \{a, b, c, d\}$ запишите все подмножества. Сколько их получилось?

5. В данных множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Найдите элементы, не обладающие этим свойством:

а) $\{4, 12, 36, 39, 48\}$; б) $\{3, 7, 11, 13, 21, 31\}$; в) $\{1, 4, 16, 36, 48, 64\}$;

г) {ромб, параллелограмм, пирамида, трапеция}; д) {собака, коза, кошка, индюк, овца}.

6. Множество задано характеристическим свойством. Задайте его перечислением элементов.

а) $A = \{x \mid x^2 - 9x + 18 = 0\}$;

б) $B = \{x \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$;

в) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -3 \leq x < 6\}$;

г) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{-x^2+x+6}{(x-3)^2} = 0\}$.

7. Определите, являются ли числа $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{5}$ элементами множества $A = \left\{ \frac{5-n}{n^2+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

8. Определите, является ли множество конечным и изобразите элементы множества на числовой оси.

а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 13\}$; б) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -7 < x \leq 4,3\}$;

в) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq -9,3\}$; г) X – множество целых корней уравнения $(x^2 - 9)(x - 3)(4x + 7) = 0$

9. Выберите из данных множеств пустые множества.

а) множество корней уравнения $|x - 3| = 3$;

б) множество прямых плоскости, перпендикулярных двум пересекающимся прямым;

в) множество решений неравенства $x^2 - 9 \leq 0$;

г) множество корней уравнения $|9 - 5x| = -3$.

10. Даны множества $A = \{b, c, d, 1\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{d, c\}$.

Выберите верные утверждения:

а) множества A и C не имеют одинаковых элементов;

б) множества B и C равны;

в) множества A и C равны;

г) множество A содержится в множестве B ;

- д) множество C содержится в множестве A ;
- е) Множество C является подмножеством множества B ;
- ж) Пустое множество $\{\emptyset\}$ является подмножеством множества A ;
- и) Множество A конечно;
- к) Множество B является бесконечным;
- л) Множество B является подмножеством пустого множества.

1.2. Операции над множествами. Круги Эйлера.

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$.

2. Пусть A – множество натуральных чисел, делящихся на 2 и меньших 8, B – множество натуральных чисел, делителей 28 и не превышающих 7.

Найдите пересечение, объединение, разность множеств A и B , разность множеств B и A .

3. Выпишите и изобразите на числовой оси объединение и пересечение множеств целых чисел A и B , если:

- | | |
|--|---|
| а) $A = (-5; -1)$, $B = [0; 11]$; | б) $A = (-2; 8)$, $B = (1; 5)$; |
| в) $A = (-\infty; 3)$, $B = (0; +\infty)$; | г) $A = (-\infty; +\infty)$, $B = [3; 18]$; |
| д) $A = (-\infty; -4]$, $B = (-3; +\infty)$; | е) $A = (3; +\infty)$, $B = (-\infty, 14]$. |

4. Пусть даны множества A и B

- | | |
|--|--|
| а) $A = \{a, б, д, ж, и, л\}$, $B = \{a, г, е, ж\}$; | б) $A = \{a, в, г, д, и\}$, $B = \{б, г, д, к\}$; |
| в) $A = \{в, е, ж, к\}$, $B = \{б, в, к, м\}$; | г) $A = \{a, б, д, ж, и, л\}$, $B = \{a, г, е, ж\}$; |
| д) $A = \{в, е, ж, к\}$, $B = \{б, в, к, м\}$; | е) $A = \{a, б, д, ж, и, л\}$, $B = \{a, г, е, ж\}$; |
| ж) $A = \{-1, 3, 5, 6\}$, $B = \{-4, 2, 6\}$; | з) $A = \{1, 10\}$, $B = \{-5, 1, 4, 10\}$. |

Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

5. $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 16\}$; $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -4 < x \leq 11\}$.

Перечислите элементы множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

6. Пусть множества A и B – множества рациональных чисел,

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $A = [-4; 2)$, $B = (1; 9]$; | б) $A = [-2; 8)$, $B = [-3; 5]$; | в) $A = [2; 7)$, $B = [0; 10]$; |
| г) $A = [3; 6)$, $B = [2; 5]$; | д) $A = [-14; 1)$, $B = [-1; 2]$; | е) $A = [-16; 0)$, $B = [-2; 5]$. |

Изобразите на числовой оси множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

7. Даны множества $A = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$, $B = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3\}$, $C = \{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3\}$, $D = \{6, 5, 4, 3, 2\}$. Перечислите элементы, входящие во множества:

- | | | |
|--|---|---|
| а) $A \cup B \cup C \cup D$; | б) $A \cap B \cap C \cap D$; | в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; |
| г) $(A \cap B) \cap (C \cup D)$; | д) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; | е) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; |
| ж) $(A \cap C) \setminus (A \cap B)$; | з) $(A \cup D) \setminus (B \cap D)$; | и) $(A \cup C) \setminus (B \setminus D)$ |

8. Чему равны $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, если $A \subset B$.

9. Пусть $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$B = \{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3\}$,

$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

\mathbb{N} – множество натуральных чисел,

\mathbb{Z} – множество целых чисел.

Найдите $A \cap \mathbb{N}$, $B \cap \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$, $(A \cap B) \cap \mathbb{N}$

10. Даны множества: A – множество параллелограммов, B – множество прямоугольников, C – множество ромбов, D – множество квадратов.
Найдите $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C \cup D$, $A \cap B \cap C \cap D$.

11. Даны множества

- а) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 5, 7, 8\}$;
 б) $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$;
 в) $A = \{\text{в, д, ж, з, и}\}$, $B = \{\text{б, в, ж, з, к}\}$;
 г) $A = \{\{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 1\}$.

Найти симметрическую разность этих множеств.

12. Из букв фамилии составьте множество A , из букв имени составить множество B , из букв отчества составить множество C , удаляя повторяющиеся буквы. Найдите: объединение множеств A , B и C , пересечение множеств A , B и C , разность $A \setminus B$, разность $B \setminus A$, симметрическую разность множеств A и B .

13. Найти дополнение множества B до множества A , если:

- а) $B = \{5, 6\}$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; б) $B = \{4, 6, 7\}$, $A = \{4, 6, 7, 8, 10, 12\}$;
 в) $B = \{\text{в, ж, з}\}$, $A = \{\text{б, в, ж, з, к}\}$; в) $B = \{\text{д, ж, з, и}\}$, $A = \{\text{б, в, д, ж, з, и, к}\}$;
 г) $B = \{15, 16\}$, $A = \{2, 3, 4, 15, 16\}$; г) $A = \{-2, 0, 3, 4, 5\}$, $A = [-3; 5]$;

14. Найдите дополнение множества Y до множества X , если:

- а) X – множество точек луча AB , Y – множество точек отрезка AC ;
 б) X – множество точек квадрата, Y – множество точек круга, вписанного в этот квадрат;
 в) множества натуральных чисел до множества целых;
 г) множества рациональных чисел до множества действительных;
 д) множества целых чисел до множества рациональных;
 е) множества целых чисел до множества действительных.

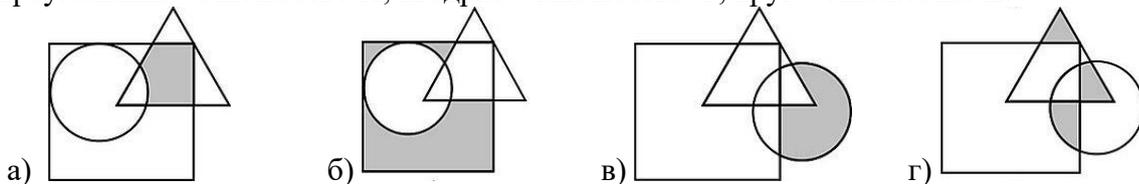
15. Найти $A \times B$ и $B \times A$, если:

- а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$; б) $A = \{a, б, в\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$; в) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, б, в\}$.

16. Пусть множество $U = \{a, б, в, г, д, е, ё, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э, ю, я\}$ – множество всех букв русского алфавита, $A = \{н, м, к, л, ё\}$,
 $B = \{л, е, з, о, к\}$, $C = \{к, о, ч, ы, б\}$. Перечислите элементы следующих множеств, найдите их мощность, постройте для них диаграммы Эйлера-Венна:

- а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $(A \cap B) \cup C$;
 г) $(A \cup C) \cap C$; д) $U \setminus (A \cup B \cup C)$; е) $U \setminus (A \cap B \cap C)$.

17. Записать через операции над множествами, чему равна заштрихованная область, если треугольник – множество X , квадрат – множество Y , круг – множество Z .



18. Для множеств X, Y, Z из условия задачи 16 построить круги Эйлера для:

- а) $X \cup (Y \setminus Z)$; б) $X \setminus (Y \setminus Z)$; в) $(X \cup Y) \setminus Z$; г) $(Z \setminus Y) \cap X$.

19. Даны взаимопересекающиеся множества A, B, C . Построить следующие множества при помощи кругов Эйлера:

- а) $A \setminus (B \cup C)$; б) $(A \cup B) \setminus C$; в) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; г) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$;
 д) $(A \setminus B) \cup C$; е) $(A \cap B) \setminus (B \cap C)$; ж) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; з) $A \setminus (B \cap C)$.

20. Используя диаграммы Эйлера-Венна доказать тождества:

- а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; б) $A \cup (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
 в) $A \cup (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$; г) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$;
 д) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; е) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 ж) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$; з) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 и) $A \cup (A \cap B) = A \cup B$ к) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

1.3. Решение текстовых задач с помощью кругов Эйлера-Венна.

1. В студенческой группе 25 студентов. В фитнес-центре работают 10 студентов, в баре – 8, а 10 студентов усердно грызут гранит науки и нигде не работают. Сколько студентов работают и в фитнес-центре и в баре? Сколько работают только в фитнес-центре?

2. На полке 80 книг. Из них 39 – художественных, а 51 книга имеет больше 200 страниц. Сколько художественных книг имеют больше 200 страниц?

3. В группе 20 студентов занимаются спортом. 11 студентов занимаются баскетболом, 12 – вольной борьбой. Сколько студентов занимаются только баскетболом? Сколько только вольной борьбой?

4. К зачету по математике необходимо выучить 26 вопросов. Из них 4 выучили и Вася Непейпиво и Сигизмунд Немудрый. Агафья Мозгоедова выучила 7 вопросов, которые не учили ни Вася Непейпиво ни Сигизмунд Немудрый и 2 вопроса, которые выучил Вася Непейпиво. Всего Вася Непейпиво выучил 11 вопросов. Сколько вопросов выучил Сигизмунд Немудрый?

5. Из 24 учащихся 11 класса занимаются музыкой 10 человек, рисуют – 8 человек, увлекаются спортом – 12 человек. Занимаются музыкой и рисованием – 3 человека, а рисованием и спортом – 2, и 1 человек занимается и музыкой, и рисованием, и спортом. Сколько учеников имеет только одно увлечение? Сколько учеников упорно готовятся к ЕГЭ и не отвлекается ни на что другое?

6. В кондитерской за вечер было 65 покупателей. Ими было куплено 35 тортов, 36 пирожных, 37 пирогов. 20 из них купили и торт и пирожное, 19 – и пирожное и пирог, 15 – торт и пирог, а все 3 покупки сделали 3 человека. Был ли покупатель, который берег свою фигуру и ничего не купил?

7. В магазине было продано 30 футболок, из них футболки с длинными рукавами, с длинными рукавами и с рисунком, с длинными рукавами без рисунка, с короткими рукавами и с рисунком. Среди купленных было 20 футболок с длинными рукавами, 10 футболок с длинными рукавами и без рисунка. Сколько было куплено футболок с короткими рукавами без рисунка, сколько футболок с длинными рукавами и с рисунком, сколько всего футболок без рисунка?

8. В буфет привезли пирожки с начинкой и булочки с изюмом в количестве 300 штук. Среди них всего с рисом 116 пирожков, с мясом 94, только с грибами 30, только с рисом 58, только с мясом 42, только с грибами и мясом 20 пирожков, а также с рисом и грибами, рисом и мясом. Количество пирожков с рисом и грибами равно количеству пирожков с рисом и мясом. Сколько пирожков со всеми тремя начинками сразу, сколько всего с грибами, сколько булочек с изюмом было продано в буфете?

9. Фермер разводит баранов и коров. В его стаде баранов всего 100, не белых безрогих баранов 30, не белых рогатых баранов 45, белых безрогих баранов 20, рогатых черных коров – 15, безрогих не черных коров – 75. Всего коров 125, всего рогатых коров и баранов – 95. Сколько в стаде всего коров и баранов? Сколько черных безрогих коров? Сколько безрогих нечерных коров?

10. Из Воронежского зоопарка из-за заснувшего сторожа совершили побег животные. 22 из них были с рогами, 16 – обиделись на служителей, которые не докладывали им мяса, 18 – захватили с собой своих соседей по клетке. Удалось выяснить, что среди беглецов 8 – рогатых, прихвативших соседей, не обижались на служителей, а 7 рогатых обиженных животных не пригласили соседей. Только рогатых было на 1 меньше, чем только обиженных, которых на 1 меньше, чем только убежавших с соседом. Обиженных рогатых животных с соседом на 3 больше, чем только рогатых животных.

Посчитать: сколько сбежало только рогатых животных; только с соседом и только обиженных; обиженных с соседом, но без рогов. Примечание: животных, которых захватили, не считать самостоятельно сбежавшими.

Раздел 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Определение высказываний, выявление логических связей.

1. Выяснить, является ли предложение высказыванием:

- а) «Всю ночь шел дождь»;
- б) «Спой нам песню»;
- в) «Зашел в магазин»;
- г) «Студенты колледжа хорошие спортсмены»;
- д) «Дайте жалобную книгу!»;
- е) «Пойдем в театр?»;
- ж) «Птицы улетают на юг»;
- з) «Уехал на соревнования».

2. Определить, является ли предложение высказыванием. Если является, то обозначить его и определить истинность:

- а) «Осенью птицы улетают на юг»;
- б) «Луна квадратная»;
- в) «Купили пять поросят»;
- г) «Ты идешь на тренировку?»;
- д) «Красное море – теплое»;
- е) «Дважды два – пять»;
- ж) «Зимой дни короткие»;
- з) «Давайте играть в футбол!»

3. Определить, сколько простых высказываний в предложении. Перефразировать его при помощи подходящей логической связки:

- а) «Хороший спортсмен много тренируется»;
- б) «Переходя улицу в неполюженном месте, пешеход может попасть под машину»;
- в) «В конце повествовательного предложения ставят точку, а может быть многоточие»;
- г) «Добросовестному студенту легко учиться»;
- д) «Успешно сдав сессию, студент переходит на следующий курс»;
- е) «Не сдавший вовремя экзамен студент не получит стипендию»;
- ж) «Сегодня очень жарко, работает кондиционер»;
- з) «На небе нет туч, не идет дождь».

4. Подчеркнуть простые высказывания, обвести кружком логическую связку:

- а) «Если на улице холодно, я надеваю шубу»;
- б) «На летних каникулах Василий будет отдыхать на Кипре, или поедет в спортивный лагерь, или будет работать»;
- в) «Неверно, что если все углы треугольника острые, то он прямоугольный»;
- г) «Четырехугольник является квадратом тогда и только тогда, когда его стороны равны и все углы прямые»;
- д) «В зимний воскресный день Илларион катается на лыжах или на коньках»;
- е) «Неверно высказывание: статья скучная, если она длинная, и написана на иностранном языке»;
- ж) «Летом Матрена поедет на дачу и если будет хорошая погода, будет загорать и купаться или собирать клубнику и малину»;
- з) «Спортсмен добивается успеха тогда и только тогда, когда он упорно тренируется и не нарушает спортивный режим»;

5. Составьте сложные высказывания, используя следующие простые высказывания:

- а) «Я купила груши», «Я варю варенье»;
- б) «Я встретила с Гертрудой в парке», «Она уже окончила школу», «Она будет учиться в колледже»;
- в) «Первая группа студентов пойдет на выставку», «Вторая группа студентов пойдет на стадион»;
- г) «В библиотеке имеются сборники стихов», «В библиотеке имеются романы»;
- д) «Половина группы – девушки», «Вторая половина группы – юноши»;
- е) «Число имеет три делителя», «Число является простым».
- ж) «Сегодня будет тепло», «Сегодня светит солнце», «Сегодня пойдет дождь»;
- з) «Все стороны треугольника равны», «Треугольник является равнобедренным», «Треугольник равнобедренный».

2.2. Перевод с естественного языка на формальный.

1. Даны простые высказывания: «У животного есть хобот»; «Животное слон». Составьте сложное высказывание, используя следующие логические связки и запишите его формулой:

- а) «не»; б) «и», «или»; в) «если...то»; г) «тогда и только тогда».

2. Даны простые высказывания «Факел» победит», ««Зенит» окажется на втором месте». Употребляя буквы для их обозначения, записать с помощью формул сложные высказывания:

- а) «Либо матч выиграет команда «Факел» и второе место займет команда «Зенит», либо «Факел» не выиграет, но второе место все же достанется «Зениту»»;
- б) «Неверно, что либо матч выиграет «Факел» и второе место займет «Зенит», либо «Факел» не выиграет и второе место не достанется «Зениту»»;
- г) «Из того, что «Факел» проиграл не следует, что второе место не достанется «Зениту»»;
- д) «Матч «Факел» не выиграет и «Зенит» не займет второе место»;
- е) «Если матч выиграет «Факел», значит, второе место займет «Зенит»».

3. Составьте и запишите истинные сложные высказывания из простых с использованием логических операций.

- а) «неверно, что $8 > A > 5$ и $B > 0$ »;
- б) «число C является наименьшим для чисел (C, K) »;
- в) «число A является наибольшим чисел (A, C, P) »;
- г) «каждое из чисел A, B, C положительно»;
- д) «каждое из чисел A, B, C отрицательно»;
- е) «все числа A, B, C равны 12»;

- ж) «если А кратно 4, то А кратно 2»;
 з) «если В кратно 2, то оно четное».

4. Записать символически высказывания, употребляя буквы для обозначения простых высказываний.

- а) «Анжелика ходит в театр только тогда, когда там представляют классические русские и зарубежные трагедии»;
 б) «Необходимым и достаточным условием успешной учебы является посещение занятий, выполнение домашнего задания и написание аудиторных контрольных работ»;
 в) «Спортсмен не может тренироваться, если он утомлен или не обедал»;
 г) «Если Прасковья заработает много денег, она купит автомобиль и поедет к морю»;
 д) «Если Прасковья не заработает много денег, она не купит автомобиль и не поедет к морю»;
 е) «Если у Агафьи пирсинг на лице, то у нее много поклонников и она популярна»;
 ж) «Если Мефодий не носит кеды, то он не стильный и если он не стильный, то у него необычные друзья»;
 з) «У Василисы дома хорошая библиотека и она много читает и делится книгами с друзьями».

5. Рассмотрим простые высказывания:

А – «Арина едет в поезде»; В – «Арина спит»; С – «Арина решает кроссворд». Запишите символически следующие высказывания:

- а) «Неверно, что Арина едет в поезде и решает кроссворд»;
 б) «Неверно, что Арина едет в поезде, решает кроссворд или спит»;
 в) «Арина не едет в поезде, но при этом решает кроссворд или не спит»;
 г) «Арина не едет в поезде, не спит – она решает кроссворд».

2.3. Перевод с формального языка на естественный.

1. Какое логическое выражение соответствует высказыванию: «Точка a содержится в промежутке $(1; 10)$ »?

- а) $(a < 1)$ или $(a > 10)$; б) $(a > 1)$ и $(a < 10)$; в) $\text{не}(a < 1)$ или $(a < 10)$.

2. Представить логическую формулу в виде высказывания на русском языке.

- а) $C \vee D$; б) $C \Rightarrow D$; в) $C \Leftrightarrow D$; г) $C \wedge D$.

3. Представить логическую формулу в виде высказывания на русском языке.

- а) $(A \vee B) \Leftrightarrow C$; б) $X \Leftrightarrow Y \vee Z$; в) $(C \Rightarrow D) \vee A$;
 г) $D \Rightarrow C \vee F$; д) $D \Rightarrow C \wedge F$; е) $A \wedge B \Rightarrow C$

4. Из данных выражений сформулируйте сложное высказывание на русском языке.

- а) $(A > 3 \text{ и } A < 5)$ или $(A < 10 \text{ и } A > 6)$;
 б) $(A = B)$ и $(A = C)$;
 в) $\text{не}(B < 0)$ и $B < 7$ или $(C > 0)$;
 г) $(1 < C)$ и $(C < 6)$ и $(\text{не}(K < 10))$.

5. Записать формулу на русском языке. Найти интерпретации предложений X, Y, Z в которых она ложна и истинна.

- а) $X \wedge \bar{Y} \Leftrightarrow Z \Rightarrow \bar{A}$; б) $(X \wedge Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (\bar{Z} \Rightarrow X)$;
 в) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \wedge Y \Rightarrow Z)$; г) $\overline{(X \Rightarrow Y)} \Leftrightarrow X \wedge \bar{Y}$;
 д) $(X \Rightarrow Y \vee Z) \Rightarrow (\bar{Y} \Rightarrow X)$; е) $X \vee (\bar{Y} \Leftrightarrow Z) \Rightarrow \bar{A}$.

2.4. Нахождение значения истинности высказываний, доказательство тождественной истинности или ложности формул.

1. Определите значения истинности высказываний X и Y , если

- а) $(\sqrt{2} - \text{иррациональное число}) \wedge X$ – ложное высказывание;
- б) $Y \vee (17 - \text{четное число})$ – истинное высказывание;
- в) $(3 - \text{простое число}) \Rightarrow X$ – ложное высказывание;
- г) $Y \Leftrightarrow (7 - \text{составное число})$ – истинное высказывание;
- д) высказывание $\langle \bar{X} \wedge \bar{Y} \rangle$ – истинное высказывание;
- е) высказывание $\langle \bar{X} \vee \bar{Y} \rangle$ – ложное высказывание;
- ж) высказывание $\langle \bar{X} \rightarrow \bar{Y} \rangle$ – ложное высказывание.

2. Определите значения истинности высказываний и постройте их отрицания:

- а) «корень третьей степени из числа 8 равен 2»;
- б) «некоторые целые числа кратны 3»;
- в) «все отрицательные числа – четные»;
- г) «число 16 не является целым числом и делится на 4»;
- д) «число 11 – простое или не кратно 3».

3. Вычислите значения истинности высказываний.

- а) $(3 = 3)$ и $(5 = 5)$;
- б) не $(8 > 10)$;
- в) («яблоня» = «сосна») или («абрикос» = «ольха»);
- г) не («яблоня» = «сосна»);
- д) не $(8 > 16)$ и $(20 < 10)$;
- е) («уши даны, чтобы слышать») и («над четвертым этажом находится пятый этаж»);
- ж) $(\frac{15}{3} = 5)$ или $(6 \times 3 = 24)$.

4. Построить таблицы истинности для формул.

- а) $X \wedge Y \Rightarrow Z$;
- б) $X \wedge Y \vee X \wedge Y$;
- в) $A \vee B \Rightarrow C$;
- г) $A \vee B \Leftrightarrow A \wedge C$;
- д) $(A \Rightarrow B) \wedge C$;
- е) $A \wedge B \Rightarrow C \vee B$;
- ж) $(A \vee B) \Leftrightarrow C$;
- з) $X \Leftrightarrow Y \vee Z$;
- и) $(C \Rightarrow D) \vee A$;
- л) $X \Leftrightarrow Y \vee Z$;
- м) $D \Rightarrow C \vee F$;
- н) $A \wedge B \Rightarrow C$.

5. Построить таблицы истинности для формул.

- а) $X \wedge \bar{Y} \Leftrightarrow Z \rightarrow \bar{A}$;
- б) $(X \wedge Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (\bar{Z} \Rightarrow X)$;
- в) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \wedge Y \Rightarrow Z)$;
- г) $(\overline{X \Rightarrow Y}) \Leftrightarrow X \wedge \bar{Y}$;
- д) $(X \Rightarrow Y \vee Z) \Rightarrow (\bar{Y} \Rightarrow X)$;
- е) $X \vee (\bar{Y} \Leftrightarrow Z) \Rightarrow \bar{A}$.

6. Определить, являются ли формулы тождественно истинными.

- а) $(X \vee Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge Z \vee Y \wedge Z$;
- б) $D \Rightarrow C \wedge F$;
- в) $X \Rightarrow Y \Leftrightarrow X \wedge Y$;
- г) $X \Rightarrow Y \Leftrightarrow X \vee Y$;
- д) $X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$;
- е) $A \wedge \bar{B} \wedge \bar{A} \wedge C \vee A \wedge \bar{C}$;
- ж) $\overline{A \vee C} \vee \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge A \vee \bar{B}$;
- з) $\overline{A \wedge \bar{B} \vee C} \vee (\bar{A} \vee B \wedge \bar{C})$;
- и) $\overline{A \vee \bar{B} \vee C} \wedge (X \vee \bar{B} \wedge C)$.

7. Построить таблицы истинности для следующих выражений.

- а) $\bar{A} \vee (\bar{B} \vee C) \Rightarrow C$;
- б) $\bar{A} \Leftrightarrow B \wedge \bar{C}$;
- в) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;
- г) $(A \Rightarrow \bar{B}) \wedge (C \wedge A \Rightarrow C)$;
- д) $\bar{A} \vee ((A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge C))$.

8. Являются ли эквивалентными следующие высказывания:

- а) $(\overline{X \wedge Y}) \Rightarrow X$ и $X \vee Y$;
- б) $(\overline{X \Rightarrow Y}) \Leftrightarrow (\bar{Y} \wedge \bar{X})$ и $((X \Rightarrow Y) \wedge \bar{Y}) \Rightarrow X$;

- в) $(\overline{X \Rightarrow Y}) \vee (\overline{Y} \wedge \overline{X})$ и $((X \Rightarrow Y) \wedge \overline{Y}) \oplus X$; г) $(\overline{X \Rightarrow Y}) \vee (\overline{Y} \wedge \overline{X})$ и $((X \Rightarrow Y) \oplus \overline{Y}) \vee X$;
 д) $(\overline{X \vee Y}) \vee (\overline{Y} \wedge \overline{X})$ и $((X \vee Y) \oplus \overline{Y}) \Rightarrow X$; е) $(\overline{X \oplus Y}) \Rightarrow (\overline{Y} \oplus \overline{X})$ и $X \Rightarrow ((X \vee Y) \wedge \overline{Y})$;
 ж) $(A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$ и $A \wedge (B \oplus C)$; з) $A|(B \wedge C)$ и $(A|B) \oplus (A|C)$;
 и) $A|(B \Rightarrow C)$ и $(A|B) \Rightarrow (A|C)$; к) $(A|B) \Rightarrow (A|C)$ и $(\overline{C} \vee B) \Rightarrow (\overline{C} \oplus \overline{A})$.

9. Указать, при каких значениях X, Y, Z (A, B, C) логическая формула является истинной, при каких – ложной.

- а) $(\overline{X \Rightarrow Y}) \wedge (\overline{Y} \Leftrightarrow \overline{X})$; б) $((X \Rightarrow Y) \wedge \overline{Y}) \oplus X$; в) $(\overline{X \wedge Y}) \Leftrightarrow (\overline{Y} \oplus \overline{X})$;
 г) $(X \vee Y) \oplus (X \oplus \overline{Y})$; д) $A|(B \Rightarrow C)$; е) $(A|B) \vee (A|C)$;
 ж) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; з) $A \oplus (B \vee C)$; и) $A|(B \oplus C)$;
 к) $(A|B) \vee (A|C)$; л) $\overline{A} \vee (\overline{B} \vee C) \Rightarrow C$; м) $A \vee B \Leftrightarrow A \wedge C$.

10. При помощи таблиц истинности доказать, что:

- а) $\overline{\overline{X}} \Leftrightarrow X$; б) $(\overline{X \wedge Y}) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$; в) $(\overline{X \vee Y}) \Leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$;
 г) $(X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge X)$; д) $(X \wedge Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$; е) $(X \vee Y) \Leftrightarrow (Y \vee X)$;
 ж) $(X \vee Y) \vee Z \Leftrightarrow X \vee (Y \wedge Z)$; з) $(X \wedge (Y \vee Z)) \Leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$;
 и) $(X \vee (Y \wedge Z)) \Leftrightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$.

2.5. Решение задач с применением логических формул и таблиц истинности

1. Ангелина, Вероника, Светлана едут на экскурсию. Ангелина поедет тогда и только тогда, когда одновременно не поедут Вероника и Светлана. Если поедет Вероника, то поедет и Светлана. Ангелина все-таки поехала на экскурсию. Определить, с кем она поехала.

2. У кошки три котенка: Мурзик, Барсик, Смайлик. Если кошка даст по мышке Мурзику и Смайлику, то и Барсик получит мышку. Также известно, что Мурзик не получит свою мышку тогда и только тогда, когда без мышки останется Смайлик. Кто из котят получил мышку?

3. Бухгалтер, главный бухгалтер и товаровед готовили квартальный отчет. Утром следующего дня выяснилось, что в кабинете сломан принтер. Охранник обманул, сказав, что если на момент поломки в кабинете не было бухгалтера, а был товаровед, то там же был и главный бухгалтер. Кто сломал принтер?

4. Из зоопарка ночью украли слона. Ночью в зоопарке оставались сторож, директор и ветеринар. Директор сказал, что если в слоновнике был я, то не было ветеринара или был сторож. Позже выяснилось, что директор солгал. Кто украл слона?

5. С контрольной по математике сбежали Андрей, Виктор и Сергей. Виктор солгал, сказав, что если он был инициатором побега, то Андрей и Сергей не при чем. Кто же был инициатором побега?

Раздел 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

3.1. Правила суммы и произведения

1. У Варвары есть 18 карандашей – шесть синих, пять зеленых, три красных, остальные простые. Сколькими способами можно выбрать цветной карандаш?

2. Контрольную работу по комбинаторике писало 24 студента. Пятеро из них получили «отлично», восемь студентов написали работу на «хорошо», шесть – на «удовлетворительно», остальные работу не написали. При работе над ошибками к доске вызываются учащиеся, написавшие контрольную на «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». Сколькими способами можно это сделать?

3. Сколько существует трехзначных чисел, кратных 5?
4. У Варвары есть 12 карандашей – шесть с синими обложками, четыре с зелеными, две с красными. Сколькими способами можно выбрать три тетради с обложками разных цветов?
5. В актив класса входят ответственные за учебный сектор, культмассовый сектор, редактор стенгазеты и староста. Сколькими способами можно выбрать актив, если в классе 30 учащихся?
6. Для презентации колледжа в школе нужна группа из трех студентов, в которую входят и юноши и девушки. Как можно составить такую группу, выбирая из 8 юношей и 10 девушек?
7. В коробке у Васи 98 машинок, из них 15 совсем новых, 48 – старых, а остальные он давно поломал. Сколькими способами Вася может достать из ящика не сломанную машинку?
8. В вазе 8 яблок, 9 груш и 15 мандаринов. Сколькими способами можно взять из вазы один фрукт?
9. В команде 24 спортсмена. Для участия в эстафете необходимо выбрать бегуна, прыгуна и стрелка. Сколько существует способов это сделать?
10. В 10 «а» классе 28 учеников, в 10 «б» – 24 ученика. Сколькими способами можно выбрать в актив школы одного ученика от двух классов? По одному ученику от каждого класса?

3.2. Перестановки

1. 6 студентов группы не были допущены к сдаче сессии. Сколькими способами можно составить их список?
2. У Марины есть синий, черный и красный карандаши. Сколько различных флагов трех цветов она может нарисовать?
3. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 4, 3, 2, 1, если использовать каждую только 1 раз?
4. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 3, 2, 1, 0, если использовать каждую только 1 раз?
5. Сколько слов из 7 букв можно составить из слова «конфета»?
6. Сколько разных предложений можно получить, меняя порядок слов «Я иду учиться»? «Во дворе работает снегоуборочная машина»?
7. Четыре девушки идут в театр. У них есть два билета на 4 и 5 место третьего ряда и два билета на 9 и 10 место восьмого ряда. Сколькими способами девушки могут занять эти места в театре?
8. Курьер должен доставить документы в 7 офисов. Сколько маршрутов может он выбрать?
9. Одиннадцать хоккеистов выходят на поле. Сначала идет капитан, затем вратарь, другие – случайным образом. Сколько существует способов построения?
10. Сколько существует способов для обозначения вершин ромба буквами А, В, С, D?
11. Сколько из цифр 1, 5, 8, 9 (без повторения) можно составить четырехзначных чисел, начинающихся с цифры 7?

12. На полке стоят 3 справочника, 6 учебников и 3 сборника стихов. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы сборники стихов стояли рядом?

13. Сколько различных четырехзначных чисел можно получить, переставляя 2, 2, 5, 5?

14. Есть набор цифр из трех единиц, двух двоек и одной четверки. Сколько разных шестизначных чисел можно составить из этого набора?

15. Сколько различных четырехзначных чисел можно получить, переставляя 2, 2, 3, 5?

17. Сколько разных слов можно получить при перестановке букв следующих в словах: колледж; академия; шляпа; шаровары; самооборона; нововведение; перераспределение; несанкционированность; тригонометрия; обороноспособность; перемещение; документооборот; барабашка; гоголь-моголь; кукуруза; зараза; шалаш; пельмень.

18. Пять девочек, среди которых Ангелина и Вероника, сидят на скамейке. Найти число возможных соединений, если:

а) Ангелина должна сидеть последней;

б) Ангелина должна сидеть первой, а Вероника – последней;

в) Ангелина и Вероника должны сидеть рядом.

19. Сколько перестановок можно проделать в слове «лицей» так, чтобы буквы Л, И, Ц, стояли рядом?

20. Восемь туристов заселяются в одноместную и две трехместные комнаты. Сколько возможно способов заселения?

3.3. Сочетания

1. Сколькими способами из команды в 11 человек можно выбрать двоих игроков для прохождения допинг-контроля?

2. На полке 12 различных книг. Сколькими способами можно выбрать из них 4 книги?

3. Сколькими способами за пять дней можно съесть два апельсина и три мандарина, съедая ежедневно по одному фрукту?

4. В классе 24 ученика. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

5. На сто лотерейных билетов пять выигрышных. Серафим вынул из урны пять билетов. Сколько существует способов вынуть их так, чтобы три из них были выигрышными?

6. Сколько партий в шахматы сыграют 12 шахматистов, если любые два участника встретятся между собой один раз?

7. На студенческую конференцию надо отправить 6 человек. Сколькими способами их можно выбрать из 13 человек?

8. Для проведения контрольной работы необходимо составить 4 варианта по 5 задач. Сколько способов распределить 20 задач на 4 варианта?

9. В колоде 36 карт. Сколько существует способов выбора 6 карт так, чтобы среди них было 2 десятки?

10. В буфете продаются пирожки с тремя разными начинками. Сколькими способами можно купить 9 пирожков?

11. На белые поля доски выставляется 8 шашек. Сколько способов расстановки возможно?
12. На белые поля доски выставляется 12 белых и 12 черных шашек. Сколько способов расстановки возможно?
13. У Василия 11 книг фантастики, а у Василисы – 15 любовных романов. Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги для обмена?
14. К выставке подготовлено 30 попугаев, 2 из которых – какаду. Необходимо отобрать 4 попугая, среди которых 2 какаду. Сколько вариантов отбора возможно?
15. Лилия купила на рынке помидоры, огурцы, баклажаны, болгарский перец, лук, укроп и готовит салат из трех видов овощей. Сколько разновидностей салатов может приготовить Лилия?
16. Для работы в детском оздоровительном лагере из волонтеров в 20 человек выбирают 5 студентов-спортсменов. Среди волонтеров 5 футболистов, 4 гимнаста и 2 борца. Сколькими способами можно укомплектовать группу волонтеров, чтобы в ней присутствовали по одному футболисту, гимнасту и борцу?
17. Один из семнадцати туристов заблудился в лесу. Четверо туристов хорошо знают окрестности. Для поиска товарища туристы разбились на две равные группы. Сколько вариантов распределения по группам есть у туристов, если в каждой группе должно быть по 2 человека, знакомых с местностью?
18. В первой группе 7 гимнастов, во второй – 9, а в третьей – 11. Сколько вариантов выбора двоих гимнастов для выступления на Дне открытых дверей существует?
19. В коробке лежат 9 апельсинов и 7 яблок. Никита достает два одинаковых фрукта. Сколькими способами возможно это сделать?
20. В коробке лежат 8 апельсинов и 12 яблок. Никита достает два апельсина и два яблока. Сколькими способами возможно это сделать?

3.4. Размещения

1. В студенческой группе 25 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя, ответственных за посещаемость и успеваемость. Один пост может занимать только один человек. Сколькими способами можно сделать выбор?
2. Группа за 12 дней должна сдать 5 экзаменов. В день можно сдавать только один экзамен. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?
3. На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4x100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?
4. 8 спортсменок участвует в забеге на 500 метров. Сколько существует способов занять первое, второе и третье места?
5. В аудитории 15 столов. Сколько существует способов рассадить на экзамене 5 студентов, если сажать их по одному за стол?
6. Для уборки аудитории из 15 студентов выделяют двоих. Сколькими способами можно это сделать?

7. Из цифр 9, 8, 7, 6, 5, 4 нужно составить различные трехзначные числа. Сколько таких чисел?
8. Студенческая группа изучает 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день из четырех пар, при условии, что все пары – различные предметы?
9. 10000 рублей вкладывается в акции пятнадцати компаний. Стоимость одной акции 1000 рублей. Сколькими способами это возможно сделать, если:
- все приобретаемые акции различны;
 - среди приобретаемых акций могут быть одинаковые?
10. У Кати есть 100 рублей. Она решила потратить их в парке, где есть 10 аттракционов со стоимостью билетов в 20 рублей. Как она может их потратить, если:
- она будет кататься на разных аттракционах?
 - некоторые аттракционы она посетит по несколько раз?
11. 6 человек входят в лифт девятиэтажного дома. Сколькими способами могут выйти пассажиры на каждом этаже, начиная со второго?
12. Сколько трехбуквенных слов можно составить из 4 букв, если буквы могут повторяться?
13. Сколькими способами можно распределить 4 билета в кинотеатр на разные фильмы между четырьмя школьниками, если каждый школьник может получить сколько угодно билетов?
14. 3 светофора работают одновременно. Сколько различных сигналов они могут дать?
15. Дано множество $A = \{a, b, c\}$. Перечислить все размещения этого множества по 2 с повторениями.
16. Даны числа 3, 6, 8. Сколько пятизначных чисел можно из них составить?
17. По трем комнатам нужно разместить 6 стульев. Каждая комната может вместить все 6. Сколько способов размещения существует?
18. 10 фильмов участвует в конкурсе по четырем номинациям. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные премии?
19. В трамвае едет 8 пассажиров. До конечной осталось 10 остановок. Сколькими способами могут выходить пассажиры на каждой остановке?
20. Для формирования пароля используют 3 буквы из 5 латинского алфавита.
- сколько всего паролей без повторения можно составить?
 - сколько всего паролей можно составить?

3.5. Разные задачи

1. Вычислить:

$$\begin{array}{llll}
 \text{а) } \frac{20!}{5! \cdot 16!}; & \text{б) } \frac{99! - 98!}{97!}; & \text{в) } \frac{50!}{48!} - \frac{30!}{28!}; & \text{г) } \frac{7! \cdot 4!}{10!} \cdot \left(\frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{9!}{2! \cdot 7!} \right).
 \end{array}$$

2. Сократить дробь:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а) } \frac{n!}{(n+1)!}; & \text{б) } \frac{n!}{(n-2)!}; & \text{в) } \frac{n!}{(n-1)!}; \\
 \text{г) } \frac{(n+1)!}{(n-2)!}; & \text{д) } \frac{(n-1)!}{n!}; & \text{е) } \frac{n!}{(n-3)!};
 \end{array}$$

$$\text{ж)} \frac{(n-2)!}{(n-4)!}; \quad \text{з)} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}; \quad \text{и)} \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}.$$

3. Упростить:

$$\text{а)} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}; \quad \text{б)} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \cdot n!; \quad \text{в)} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) \cdot (n+1)!;$$

$$\text{г)} \frac{n!}{(n-3)!A_n^2} - \frac{P_{n-1}}{(n+2)!}; \quad \text{д)} \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}.$$

4. Найти значение выражения:

$$\text{а)} P_8 - P_4 \cdot (P_3 - P_4); \quad \text{б)} \frac{P_{10} - P_6 + P_3}{P_3 \cdot P_4}; \quad \text{в)} \frac{(P_{10} - P_4) + (P_4 + P_2)}{(P_6 + P_6) + (P_2 - P_3)};$$

$$\text{г)} C_8^6 \cdot P_2; \quad \text{д)} C_{10}^7 \cdot P_3; \quad \text{е)} \frac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \frac{A_{20}^5}{C_{20}^5};$$

$$\text{ж)} \frac{P_{14}}{A_{14}^{10}} - \frac{A_{14}^4}{C_{14}^4}; \quad \text{з)} C_5^3 \cdot C_4^2 + C_4^2 \cdot C_3^1; \quad \text{и)} C_6^4 \cdot C_5^3 - C_5^3 \cdot C_4^2;$$

$$\text{к)} \frac{A_5^2}{P_2} + \frac{A_{10}^5}{7P_5}; \quad \text{м)} \frac{A_5^3 - A_5^2}{P_2} + \frac{P_5}{P_2}; \quad \text{н)} \frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^9}{A_{17}^8};$$

$$\text{о)} \frac{A_9^4 \cdot A_4^4}{A_8^6}; \quad \text{п)} \frac{A_5^5 \cdot A_{10}^3}{A_9^7}; \quad \text{р)} \frac{P_6 \cdot (C_7^5 + C_7^4)}{A_{10}^7}.$$

5. Найти n , если:

$$\text{а)} A_n^2 = 12; \quad \text{б)} A_n^3 + 3A_n^2 = \frac{1}{2} \cdot P_{n+1}; \quad \text{в)} \frac{P_{n+5}}{A_{n+4}^m \cdot P_{n+4-m}} = 15;$$

$$\text{г)} A_n^5 = 18 \cdot A_{n-2}^4; \quad \text{д)} P_{n+1} = 132A_n^k \cdot P_{n-k}; \quad \text{е)} A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2};$$

$$\text{ж)} A_n^5 = 336 \cdot C_{n-2}^{n-5}; \quad \text{з)} A_n^5 = 18 \cdot A_{n-2}^4; \quad \text{и)} (n+5)! = 240(n-k)! \cdot A_{n+3}^{r+3};$$

$$\text{к)} A_n^5 = 336 \cdot C_{n-2}^{n-5}; \quad \text{л)} 12 \cdot C_{n+3}^{n-1} = 55 \cdot A_{n+1}^2; \quad \text{м)} A_{n+3}^2 + C_{n+3}^2 = 126.$$

Раздел 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1. Задачи о выборе объектов из набора

1. Маша, Даша, Дуся и Нюся решают, кто из них пойдет к доске на уроке математики. Найти вероятность того, что к доске пойдет Нюся.

2. На соревнования прибыло 18 команд. С помощью жребия их распределяют на шесть групп по три команды в каждой. В коробке беспорядочно лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6. Команды выбирают по одной карточке. Какова вероятность того, что команда из Воронежа окажется во второй группе?

3. В корзине 12 яблок, 8 апельсинов и 4 лимона. Какова вероятность, что наугад вытасченный фрукт окажется лимоном?

4. На телевизионном пульте 10 каналов. Какова вероятность того, что случайно выбранная цифра будет нечетной и меньше 7?

5. Найти вероятность того, что случайно выбранное натуральное число из промежутка от 3 до 17 делится на 4.

6. Монету бросают два раза. Найти вероятность того, что ровно один раз выпадет орел.

7. Монету бросают три раза. Найти вероятность того, что решка выпадет ровно дважды.

8. Монету бросают три раза. Найти вероятность того, что выпадет комбинация решка, орел, орел.

9. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков.

10. Два игрока по одному разу бросают игральную кость. У первого игрока выпало 4 очка, Найти вероятность того, что у второго игрока очков окажется меньше.

4.2. Задачи на пересечение, объединение, частоту событий.

1. В магазине две кассы. Вероятность неисправности одной из них равна 0,1 независимо от другой. Найти вероятность того, что хотя бы одна из касс работает.

2. Бросают три кубика. Найти вероятность того, что на каждом выпадет более четырех очков.

3. Из 16 девочек и 9 мальчиков выбирают двух дежурных случайным образом. Найти вероятность того, что дежурить будут две девочки.

4. Василиса сделала заказ в двух интернет магазинах. Вероятность того, что ее покупку доставят из магазина «Фокус», равна 0,85, а вероятность того, что покупка придет из магазина «Покус» – 0,86. Какова вероятность того, что Василиса не получит своего заказа ни из одного магазина?

5. В кафе три официанта. Каждый из них обслуживает посетителя с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что когда Василий и Василиса решили сделать заказ, все официанты были заняты.

6. Вероятность того, что ранним дождливым утром на пробежку выйдет меньше 19 спортсменов, равна 0,26. Вероятность того, что на пробежку выйдет меньше 6 спортсменов, равна 0,009. Найти вероятность того, что спортсменов будет от 6 до 18.

7. На экзамене по математике студенту достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Дифференцирование», равна 0,26. Вероятность того, что это вопрос на тему «Интегрирование», равна 0,11. Найти вероятность того, что студенту на экзамене достанется вопрос по одной из этих тем?

8. Вероятность того, что купленный кухонный комбайн проработает больше двух лет, равна 0,93. Вероятность того, что он проработает больше трех лет, равна 0,81. Найти вероятность того, что комбайн проработает больше двух лет, но меньше трех лет.

9. На соревнования по художественной гимнастике участвуют 4 гимнастки из Испании, 6 гимнасток из Сербии, 7 гимнасток из Финляндии и 5 из России. Очередность выступлений решается жребием. Найти вероятность того, гимнастка из Сербии будет выступать первой, второй или третьей.

10. Для участников соревнований закуплено 120 футболок, из них 15 – белых, 22 – желтых, 27 – розовых, еще есть равное количество красных и зеленых. Найти вероятность того, что Василисе достанется красная или желтая футболка.

11. Одинаковую продукцию выпускают два предприятия. Первое выпускает 40% продукции, из них 2% брака, второе – 60%, брак среди которых составляет 4%. Найти вероятность того, что случайно купленный образец данной продукции окажется бракованным.

12. Популярный компакт-диск может быть куплен в трех магазинах: «Салют», «Приз», «Сюрприз». Вероятность того, что Василиса сможет купить его в «Салюте» равна 60%, в

«Призе» – 15%, в «Сюрпризе» – 25%. Известно, что в «Салюте» продают 30% контрафакта, в «Призе» – 60%, а в «Сюрпризе» – 10%. Какова вероятность того, что диск, купленный Василисой, окажется не контрафактным.

13. Сборочная линия производит микросхемы. Вероятность исправности готовой микросхемы равна 0,06. Перед укладкой каждая микросхема проходит систему контроля. Система бракует неисправную микросхему с вероятностью 0,99, а вероятность отбраковки исправной микросхемы равна 0,09. Какова вероятность, что случайно выбранная микросхема будет забракована?

14. Профессор и его аспирант принимают экзамен по математике в группе из 25 студентов. Профессор спрашивает 15 студентов, аспирант – 10. Аспирант более лоялен к плохо подготовившимся студентам и вероятность сдать экзамен у него равна 65%. Вероятность же сдать таким студентам экзамен у профессора – 35%. Найти вероятность того, что плохо подготовившийся студент сдаст экзамен.

15. Автосервис закупает запчасти в трех фирмах: «Салют», «Приз», «Сюрприз». В «Салюте» закупается 45% деталей, в «Призе» – 25%, а в «Сюрпризе» – 30%. Известно, что среди запчастей, поставляемых «Салютом» бракованных 8%, среди запчастей, поставляемых «Призом» – 4%, а среди запчастей, поставляемых «Сюрпризом» бракованных 6%. Найти вероятность того, что наугад взятая запчасть окажется годной.

16. В Солнечном городе родилось 5400 младенцев, из них – 2640 девочек. Найти частоту рождения мальчиков в этом городе.

17. Посетитель тира стреляет 25 раз, причем попадает 22 раза. Найти частоту попадания в цель.

18. Летом в Воронеже было 12 дождливых дней. Какова частота дождливых дней? Какова частота солнечных дней?

19. Симметричную монету бросили 500 раз, из них 262 раза выпала решка. На сколько частота выпадения орла в этом эксперименте отличается от вероятности этого события?

20. Семена проверяют на всхожесть. Из 1100 семян не взошло 56. Чему равна частота появления всхожих семян?

Раздел 5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Дана выборка:

а) 5, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 4, 4, 3, 3, 5, 5, 4, 5, 3;

б) 4, 6, 3, 8, 4, 3, 5, 4, 5, 6, 4, 3, 6, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 4;

в) 5, 1, 4, 8, 7, 7, 9, 4, 3, 6, 2, 4, 3, 8, 4, 5, 6, 4, 3, 2, 5, 5, 3, 5, 1, 2, 1, 5, 9, 2;

г) 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 1,4; 1,4; 1,1; 1,3; 1,6; 1,5; 1,8; 1,7; 1,1; 1,2; 1,9;

д) 15,2; 12,8; 13,5; 14,9; 15,6; 16,0; 13,7; 14,1; 13,2; 15,0; 14,5; 13,9; 13,5; 14,9; 15,6; 14,1; 13,2; 15,0; 14,5; 13,9;

е) 15,7; 20,5; 21,2; 18,4; 19,3; 17,8; 16,7; 18,8; 16,2; 22,0; 23,1; 19,5; 16,2; 22,0; 18,4; 19,3; 18,4; 19,3; 15,7; 20,5; 16,7; 18,8;

ж) 16,2; 20,1; 21,4; 18,9; 16,5; 16,2; 20,1; 21,4; 17,3; 18,2; 19,5; 18,9; 20,4; 21,0; 18,2; 21,4; 17,3; 18,2; 19,4; 20,4;

з) 22,4; 17,1; 16,4; 20,6; 19,5; 20,1; 19,3; 17,1; 18,2; 18,3; 21,7; 20,1; 19,3; 16,4; 17,1; 18,8; 20,6; 19,5; 19,3; 17,1;

и) 12,5; 13,2; 12,0; 12,5; 13,2; 14,3; 13,9; 15,5; 14,9; 14,1; 15,0; 13,3; 12,0; 12,5; 15,5; 14,9; 14,1; 15,0; 13,2; 14,3; 13,9; 15,5; 14,9; 14,1; 15,0;

- к) 17,3; 17,9; 16,5; 18,2; 17,3; 17,9; 16,5; 15,0; 18,2; 17,3; 17,9; 16,5; 15,0; 14,4; 16,1; 17,0; 16,2; 14,8; 15,7; 16,8; 18,2; 17,3;
- 1) построить вариационный ряд данной выборки;
 - 2) построить статистический ряд данной выборки;
 - 3) найти объем данной выборки;
 - 4) найти моду данной выборки;
 - 5) найти медиану данной выборки;
 - 6) найти размах данной выборки;
 - 7) найти выборочное среднее;
 - 8) найти выборочную дисперсию;
 - 9) найти среднее квадратическое отклонение;
 - 10) найти коэффициент вариации;
 - 11) построить полигон и гистограмму.

Раздел 6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Число $a = 3,2853$, его относительная погрешность составляет 1%. Определить, сколько число a содержит верных знаков.

2. Число $a = 13,225$ содержит 3 верных знака. Найти относительную погрешность этого числа.

3. Найти суммы приближенных чисел и указать их погрешность

- а) $0,235 + 231 + 67,3$ (все знаки верные),
- б) $0,202 + 284,1 + 21,59$ (все знаки верные),
- в) $488,5 - 51,17 + 0,23576$ (все знаки верные).

4. Найти произведения приближенных чисел и указать их погрешности (считая все знаки верными).

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| а) $2,38 \cdot 7,7$; | б) $15,1 \cdot 2,644$; | в) $0,03 \cdot 27,5$; |
| г) $0,354 \cdot 353 \cdot 74,7$; | д) $2,89 \cdot 7,2 \cdot 3,263$; | е) $371,56 \cdot 6357 \cdot 0,0052$. |

5. Найти частное приближенных чисел (считая все знаки верными).

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|-------------------------|
| а) $\frac{4,793}{3,043}$; | б) $\frac{0,233}{1,3}$; | в) $\frac{316}{4}$; |
| г) $\frac{536,676}{829}$; | д) $\frac{864,8267}{35,6}$; | е) $\frac{8,4}{4282}$. |

6. Абсолютная погрешность при измерении отрезка длиной 20 см равна 0,5 мм, абсолютная погрешность при измерении расстояния в 500 км равна 100 м. Какое измерение наиболее точное?

7. Вычислить площадь прямоугольника, если его стороны равны $(2,03 \pm 0,01)$ м, $(3,46 \pm 0,01)$ м.

8. В прямоугольном треугольнике катеты равны $(10,10 \pm 0,01)$ см, $(15,21 \pm 0,01)$ см. Вычислить синус, косинус, тангенс и котангенс угла, противолежащего второму катету.

9. Радиус круга измерен с точностью до 0,5 см, получено число 12. Найти абсолютную и относительную погрешность при вычислении

- а) длины окружности, ограничивающей круг;
- б) площади круга.

10. Ребро куба, равное 4, измерено с точностью до 0,02 см. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении:

- а) площади полной поверхности куба;
- б) объема куба.

11. Даны углы α, β, γ , причем $\alpha = 19^\circ 24' 3''$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 64^\circ 10''$. Считая абсолютную погрешность измерения чисел α, β и γ равной 1", определить их относительные погрешности.

12. Дано число a

- а) 3,2534; б) 0,26253; в) 0,0204; г) 2,335;
- д) -0,0025392; е) -483,75; ж) 0,2645; з) 0,004811;
- и) 315,55; к) 74,535; л) 2,2523; м) 0,2735.

Округлить число до трех значащих цифр, найти относительную и абсолютную погрешности найденных приближенных чисел.

13. Дано число a и его относительная погрешность. Найти его абсолютную погрешность.

- а) $a = 12376$, $\delta = 0,1\%$; б) $a = 1,23$, $\delta = 0,6\%$; в) $a = 37,62$, $\delta = 0,1\%$;
- г) $a = 0,396$, $\delta = 10\%$; д) $a = 123,44$, $\delta = 1\%$; е) $a = 3,42$, $\delta = 0,7\%$.

14. Определить количество верных знаков в числе x , если известна его абсолютная погрешность.

- а) $a = 0,2832$, $\Delta_\alpha = 0,15 \cdot 10^{-2}$; б) $a = 0,1241$, $\Delta_\alpha = 0,2 \cdot 10^{-2}$;
- в) $a = 48,232$, $\Delta_\alpha = 0,17 \cdot 10^{-2}$; г) $a = 393,273$, $\Delta_\alpha = 0,2$;
- д) $a = 1,215$, $\Delta_\alpha = 0,25 \cdot 10^{-1}$; е) $a = 21,00312$, $\Delta_\alpha = 0,1 \cdot 10^{-1}$;
- ж) $a = 0,0722$, $\Delta_\alpha = 0,15 \cdot 10^{-2}$; з) $a = 0,00472$, $\Delta_\alpha = 0,2 \cdot 10^{-4}$;
- и) $a = -41,285$, $\Delta_\alpha = 0,3 \cdot 10^{-2}$; к) $a = -0,3213$, $\Delta_\alpha = 0,4 \cdot 10^{-2}$.

15. Определить количество верных знаков в числе a , если известна его относительная погрешность.

- а) $a = 2,9832$, $\delta_\alpha = 0,15 \cdot 10^{-2}$; б) $a = 0,3149$, $\delta_\alpha = 0,2 \cdot 10^{-2}$;
- в) $a = 31,252$, $\delta_\alpha = 0,17 \cdot 10^{-2}$; г) $a = 0,0135$, $\delta_\alpha = 0,2$;
- д) $a = 0,000215$, $\delta_\alpha = 0,25$; е) $a = 19,4587$, $\delta_\alpha = 0,1\%$;
- ж) $a = 0,23351$, $\delta_\alpha = 10\%$; з) $a = 47272$, $\delta_\alpha = 1\%$;
- и) $a = 883,7$, $\delta_\alpha = 2\%$; к) $a = 12,8170$, $\delta_\alpha = 1\%$.