А.В. Землянко

Тригонометрические формулы

Воронеж
2007

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый справочник разработан с учетом требований Государственного стандарта среднего (полного) образования по математике (приказ МО от 09.03.2004 № 1312 «Об утверждении федерального базисного учебного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений РФ, реализующих программы общего образования») и содержит основные понятия и формулы школьного курса раздела математики «Тригонометрия».

В справочнике рассматриваются понятия радианной меры угла, поворота точки вокруг начала координат, отрицательного угла, определяется зависимость между различными тригонометрическими функциями одного и того же угла, приведена таблица часто встречающихся значений тригонометрических функций. Кроме того, основные тригонометрические формулы – сложения, двойного и половинного угла, приведения, суммы и разности тригонометрических функций представлены с выводами, а также подробно рассматриваются решения типовых задач.

Раздел курса математики, называемый тригонометрией, неоднократно претерпевал изменения как по содержанию, так и по времени его изучения. До второй половины XX века тригонометрия была даже самостоятельным учебным предметом. Но в недавнем прошлом ее материал искусственно распределили между курсами алгебры и геометрии основной школы и курсом алгебры и начал анализа средней школы. В данном справочнике автор попытался собрать вместе основные понятия тригонометрии.

1. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

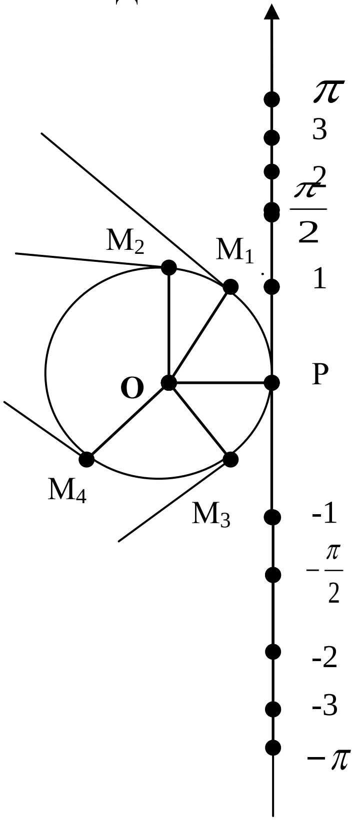

Рис. 1

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1. (рис .1.). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой - направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности, отметим на прямой несколько точек: $\pm 1, \pm\frac{\pi}{2}, \pm 3, \pm\pi$, где $\pi \approx 3{,}14$ - иррациональное число. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будем мысленно наматывать её на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например,1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4 такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т.д.

Таким образом, каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности. Так как точке прямой с координатой 1 ставиться в соответствие точка M_1, то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$.

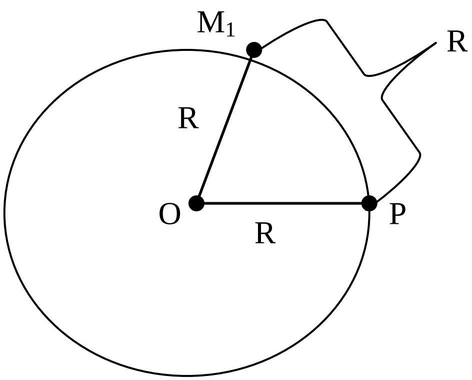

Рис.2

Такой способ измерения углов широко используется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы измеряются в радианной мере, а угол POM_1, называют углом в один радиан. (1 рад.).Длина дуги окружности PM_1 равна радиусу.

Рассмотрим окружность радиуса R и отметим на ней дугу PM_1 длины R и угол POM_1 (рис. 2).

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

Найдем градусную меру угла в 1 радиан. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180^o, то дуга длиной R стягивает угол в π раз меньший, т.е. $1\,рад = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o$.

Т.к. $\pi \approx 3{,}14$, то $1\,рад \approx 57{,}3^o$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha\,рад = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^o \qquad (1)$$

Задача 1. Найти градусную меру угла, равного:

1) $\pi\,рад$; 2) $\frac{\pi}{2}\,рад$; 3) $\frac{3\pi}{4}\,рад$.

Решение: по формуле (1) находим:

1) $\pi\,рад = 180^o$; 2) $\frac{\pi}{2}\,рад = 90^o$; 3) $\frac{3\pi}{4}\,рад = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)^o = 135^o$.

Найдем радианную мера угла в 1^o. Так как угол 180^o равен $\pi\,рад$, то $1^o = \frac{\pi}{180}\,рад$.

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha^o = \frac{\pi}{180}\alpha\,рад \qquad (2)$$

Задача 2. Найти радианную меру угла, равного:1)45^o; 2)15^o.

Решение:

По формуле (2) находим:

$$1)\ 45^o = \frac{\pi}{180}\cdot 45 рад = \frac{\pi}{4} рад;\ 2)\ 15^o = \frac{\pi}{180}\cdot 15 рад = \frac{\pi}{12} рад.$$

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной

$$\ell = \alpha R \qquad (3)$$

Задача 3: Конец минутной стрелки кремлевских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 3{,}06$ м. Какой путь проходит конец стрелки за 15 мин?

Решение: За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ рад.

По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим

$$\ell = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2}\cdot 3{,}06 м \approx 4{,}8 м$$

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности R = 1. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т.е. $\ell = \alpha$

Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и т.д.

Задача 4: Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R образованного углом в α рад, равна $S = \frac{R^2}{2}\alpha$, где $0 < \alpha < \pi$.

Решение: Площадь кругового сектора в π рад. (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$, поэтому площадь сектора в 1 рад в π раз меньше, т.е равна $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Следовательно, площадь сектора в α рад равна $\frac{R^2}{2}\alpha$.

2. ПОВОРОТ ТОЧКИ ВОКРУГ НАЧАЛА КООРДИНАТ

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют единичной окружностью. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α - любое действительное число.

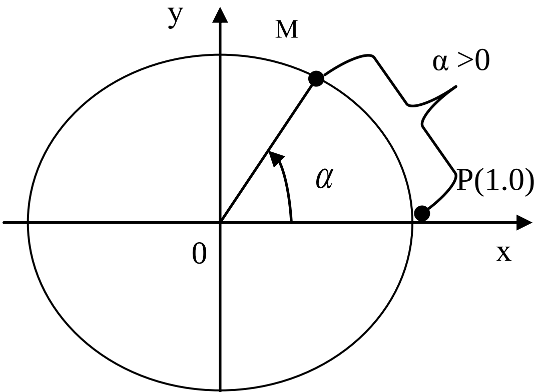

Рис. 3

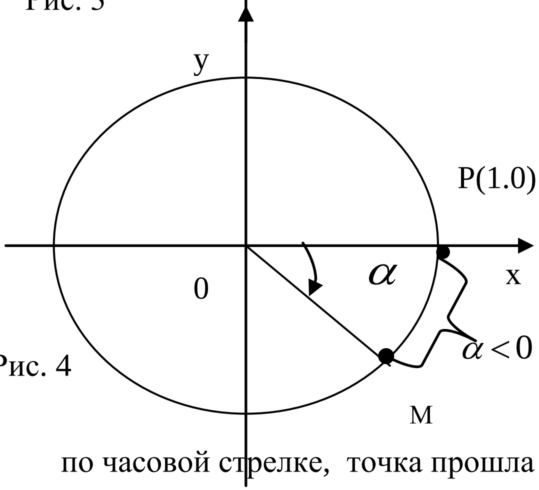

Рис. 4

1.Пусть α>0. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P (1;0) против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис 3). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α рад.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α рад означаем, что движение совершалось по часовой стрелке, точка прошла путь длиной $/\alpha/$ (рис.4).

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

Примеры:

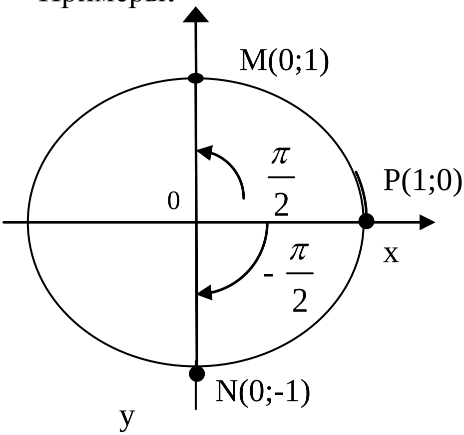

Рис.5

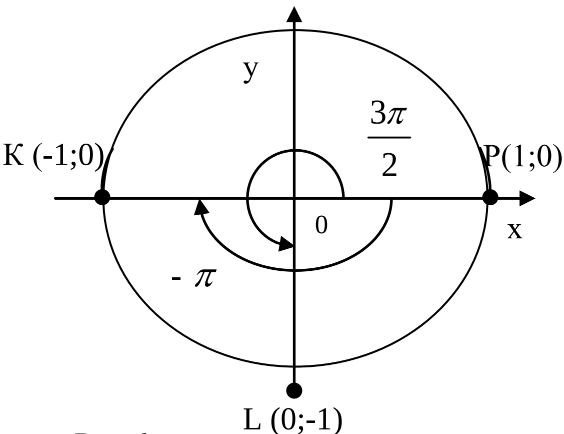

Рис.6

1) При повороте точки P (1;0) на угол $\frac{\pi}{2}$ рад получается точка M (0;1) (рис. 5)

2)При повороте точки P (1;0) на угол $-\frac{\pi}{2}$ получается точка N (0; -1) (рис.5)

3) При повороте точки P (1;0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад получается точка L (0; -1) (рис.6)

4) При повороте точки P (1;0) на угол $-\pi$ рад получается точка К(-1;0)

.

В курсе геометрии рассматривались углы от 0^o до 180^o. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180^o, а также отрицательные углы.

Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки Р (1;0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на 270^o; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ - это поворот на -90^o.

Отметим, что при повороте точки Р (1;0) на 2π, т.е. на 360^0, точка возвращается в первоначальное положение. При повороте этой точки на -2π, т.е. на -360^0 она также возвращается в первоначальное положение.

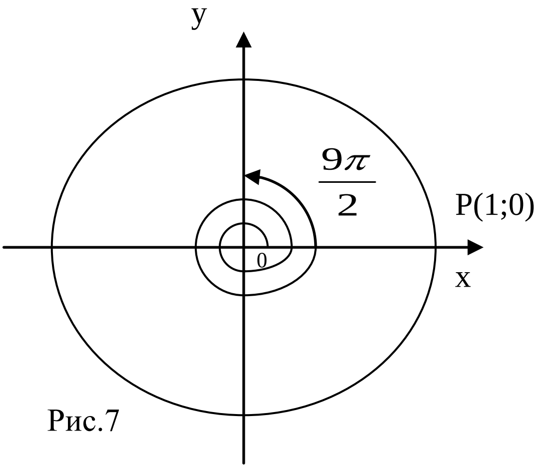

Рис.7

Теперь рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой

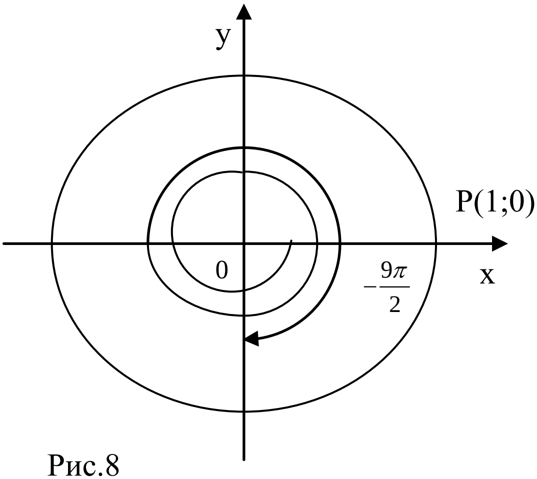

Рис.8

стрелки и ещё проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис.7).

При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}=-2\cdot 2\pi-\frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 8).

Заметим, что при повороте точки Р (1;0) на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис.7). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 8).

Вообще, если $\alpha=\alpha_0+2\pi k$, где k – целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки Р (1;0) на угол α рад.

Однако одной и той же точке М единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки Р (1;0) в точку М.

Задача 1. Найти координаты точки, полученной поворотом точки Р (1;0) на угол: 1) 7π ; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

Решение:

1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т.е. получается точка с координатами (-1;0)

2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т.е получается точка с координатами (0; -1)

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА УГЛА

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривается в промежутке от 0^{o} до 180^{o}. Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом (рис.9).

Определение 1: Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\sin\alpha$).

Определение 2: Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\cos\alpha$).

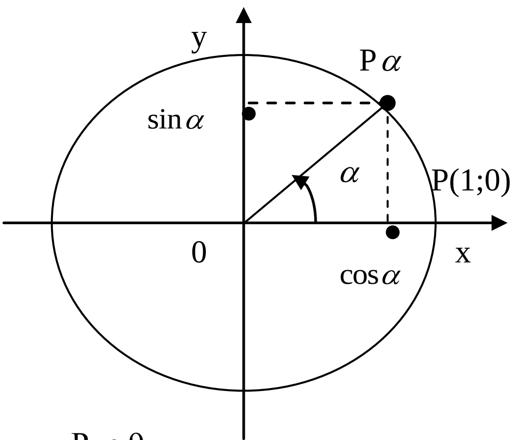

Рис.9

Например, при повороте точки (1;0) на угол $\frac{\pi}{2}$, т.е. угол 90^{o}, получается точка (0;1).

Ордината точки (0;1) равна 1, поэтому $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 90^{o}=1$, абсцисса этой точки равна 0, поэтому $\cos\frac{\pi}{2}=\cos 90^{o}=0$.

Задача 1. Найти sin(-π) и cos (-π)

Решение: Точка (1;0) при повороте на угол –π перейдет в точку (-1;0). Следовательно, sin(-π)=0, cos(-π)=-1

Задача 2: Найти $\sin 270^0$ и $\cos 270^0$

Решение: Точка (1;0) при повороте на угол 270^0 перейдет в точку (0;-1) Следовательно, $\cos 270^0=0$, $\sin 270^0=-1$.

Определение 3: Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается *tg* α)

Таким образом, $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Например, $tg0^0=\frac{\sin 0^0}{\cos 0^0}=\frac{0}{1}=0; tg\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$.

Иногда используется котангенс угла α (обозначается $ctg\alpha$), который определяется формулой $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Например,

$$ctg270^0=\frac{\cos 270^0}{\sin 270^0}=\frac{0}{1}=0, ctg\frac{\pi}{4}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1.$$

Отметим, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от -1 до 1; $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\cos\alpha \neq 0$, т.е. для любых углов, кроме $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\sin\alpha \neq 0$, т.е. для любых углов, кроме $\alpha = \pi k, k \in Z$.

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0	0	1	0	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	-

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-	0
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
2π	0	1	0	-

Задача: Вычислить $4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-tg\frac{\pi}{4}$.

Решение: Используя таблицу, получаем:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-tg\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2,5.$$

4. ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА

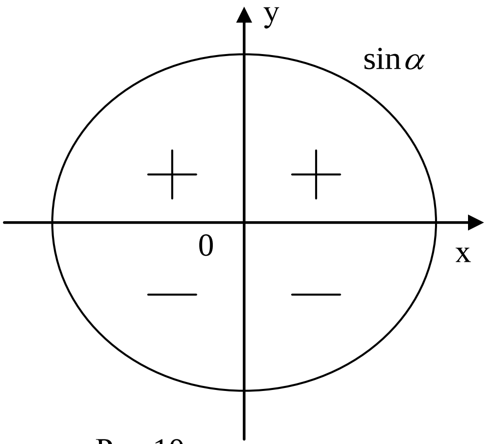

Рис.10

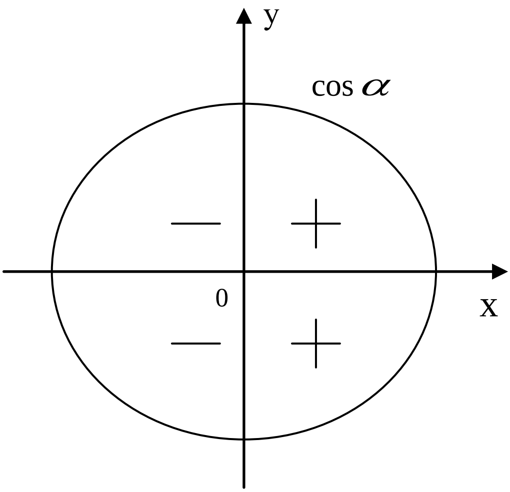

Рис.11

Пусть точка (1;0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти ординаты и абсциссы положительны.

Поэтому $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис 10,11).

Для точек, располагающихся во второй четверти ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, (рис.10.11).

Аналогично в третьей четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, а в четвертой

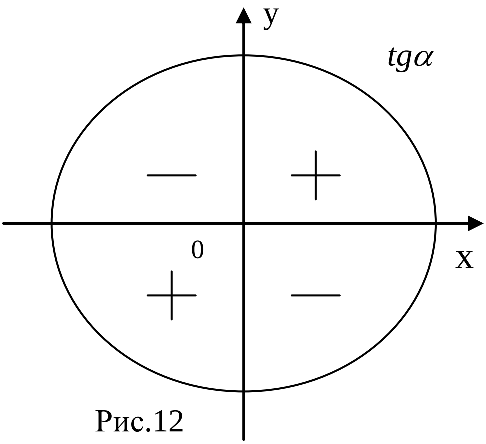

Рис.12

четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (рис. 10,11). При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка.

Если точка (1;0) движется по часовой стрелке, то знаки синуса и косинуса также определяются тем, в какой четверти окажется точка; это показано на рисунке 10,11.

По определению $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $tg\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки и $tg\alpha < 0$ если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки тангенса изображены на рисунке 12.

Задача 1. Выяснить знаки синуса, косинуса и тангенса угла: 1) $\dfrac{3\pi}{4}$; 2) 745^0; 3) $-\dfrac{5\pi}{7}$.

Решение:

1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} > 0, \cos\frac{3\pi}{4} < 0, tg\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745^o = 2 \cdot 360^o + 25^o$, то повороту точки (1;0) на угол 745^o соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745^o > 0$, $\cos 745^o > 0$; $tg\, 745^o > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки (1;0) на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0,\ \cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0,\ tg\left(-\frac{5\pi}{7}\right) > 0.$$

5. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СИНУСОМ, КОСИНУСОМ И ТАНГЕНСОМ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ УГЛА

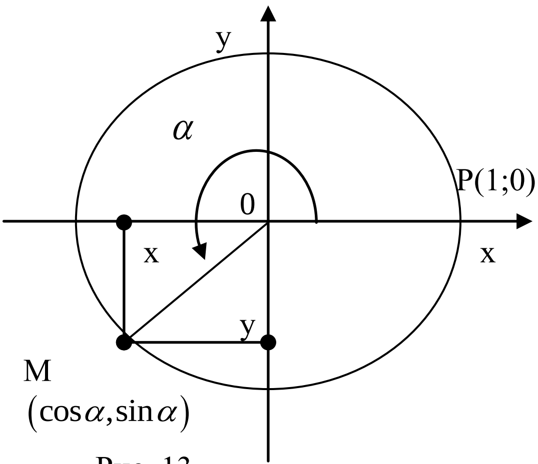

Рис. 13

Выясним зависимость между синусом и косинусом. Пусть точка M(x,y) единичной окружности получена поворотом точки (1;0) на угол α (рис.13).

Тогда по определению синуса и косинуса $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты (x;y) удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (1)

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется основным тригонометрическим тождеством.

Из равенства (1) можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1: Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение:

Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, т.е. в формуле (2) перед корнем нужно поставить знак «-»:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Задача 2: Вычислить $\cos\alpha$, если sin $\alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Решение: Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos\alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «+».

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Выясним теперь зависимость между тангенсом и котангенсом. По определению: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Перемножая эти равенства, получаем:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1 \qquad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $tg\alpha$ через $ctg\alpha$ и наоборот:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}, \tag{5}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}, \tag{6}$$

Равенства (4) – (6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

Задача 3: Вычислить $ctg\alpha$, если $tg\alpha = 13$.

Решение: по формуле (6) находим $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{13}$.

Задача 4: Вычислить $tg\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: по формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$, поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6$.

Следовательно, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$.

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем зависимость между тангенсом и косинусом.

Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha \neq 0$. Получим равенство

$$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$, откуда

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos\alpha\neq 0$, т.е. при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Из нее можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5: Вычислить $tg\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение: Из формулы (7) получаем:

$$tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $tg\alpha=-\frac{4}{3}$.

Задача 6: Вычислить $\cos\alpha$, если $tg\alpha=3$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решение: Из формулы (7) находим: $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{10}$.

Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$, и поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{0,1}$.

6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Задача1: Доказать, что при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$ справедливо равенство

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (1)$$

Решение: По определению $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, поэтому

$$1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Эти преобразования верны, так как $\sin\alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$.

Равенство (1) справедливо для всех допустимых значений α, т.е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл. Такие равенства называют тождествами, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

Обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или при упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии задачи.

Задача 2: Доказать тождество $\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

Решение: $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

Задача3. Доказать тождество $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Решение: Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0$$

При решении задач 1-3 использовались следующие способы доказательства тождеств: преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4. Доказать тождество $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

Решение:

$$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Задача 5: Упростить выражение $\dfrac{1}{tg\alpha + ctg\alpha}$.

Решение:

$$\frac{1}{tg\alpha + ctg\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

7. СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС УГЛОВ α И $-\alpha$

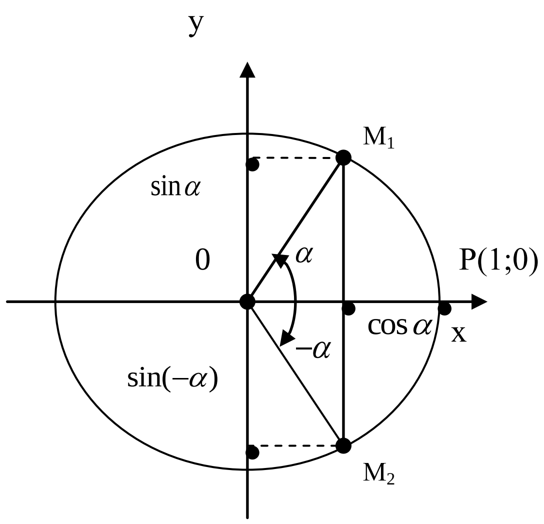

Рис.14

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки P (1;0) на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 14). Тогда ось O_x делит угол M_1 O M_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси O_x. Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками.

Точка M_1 имеет координаты $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha);\sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \tag{2}$$

Используя определение тангенса, получаем:

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha.$$

Таким образом, $tg(-\alpha) = -tg\alpha$. (3)

Формулы (1) – (2) справедливы при любых α, а формула (3) – при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$.

Формулы (1) – (3) позволяют сводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению из значений для положительных углов.

Например, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$,

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

8. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

Теорема: Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad (1)$$

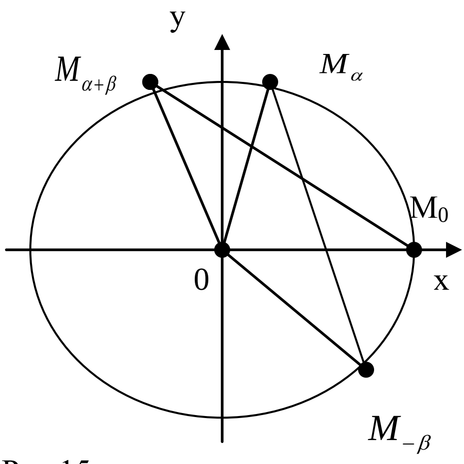

Рис.15

Пусть точки M_α, M_β, $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки M_0 (1;0) на углы $\alpha, -\beta, \alpha+\beta$ рад соответственно (рис. 15). По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$M_\alpha(\cos\alpha;\sin\alpha)$,

$M_{-\beta}\big(\cos(-\beta);\sin(-\beta)\big)$,

$M_{\alpha+\beta}\big(\cos(\alpha+\beta);\sin(\alpha+\beta)\big)$

Так как $\angle M_o O M_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta} O M_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0 O M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta} O M_\alpha$ равны, и, значит, равны их основания $M_0 M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta} M_\alpha$.

Следовательно, $\left(M_0M_{\alpha+\beta}\right)^2=\left(M_{-\beta}M_\alpha\right)^2$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$\left(1-\cos(\alpha+\beta)\right)^2+\left(\sin(\alpha+\beta)\right)^2=\left(\cos(-\beta)-\cos\alpha\right)^2+\left(\sin(-\beta)-\sin\alpha\right)^2$$

Используя формулы (1) и (2) из п.7, преобразуем это равенство:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+$$
$$+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем: $2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$, откуда

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Задача 1. Вычислить $\cos 75^0$.

Решение:

$$\cos 75^0=\cos\left(45^0+30^0\right)=\cos 45^0\cos 30^0-\sin 45^0\sin 30^0=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$,откуда

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Задача 2: Вычислить $\cos 15^0$.

Решение: По формуле (2) получаем:

$$\cos 15^0 = \cos\left(45^0 - 30^0\right) = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Задача 3. Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad (3)$$

Решение: При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta$, т.е.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta \qquad (4)$$

.

Заменив в этой формуле β на α, получим

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$. Полагая в формуле (4) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, имеем

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

Используя формулы (1) – (4), выведем формулы сложения для синуса:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ . \qquad (6)$$

Задача 4. Вычислить $\sin 210^o$.

Решение:

$$\sin 210^0=\sin\left(180^0+30^0\right)=\sin 180^0\cos 30^0+\cos 180^0\sin 30^0=$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Задача 5. Вычислить $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$.

Решение: $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0$.

Задача 6: Доказать равенство:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}\ . \qquad (7)$$

Решение: $tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$.

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу (7)

Формула (7) может быть полезна при вычислениях. Например, по этой формуле находим:

$$tg225^0=tg\left(180^0+45^0\right)=\frac{tg180^0+tg45^0}{1-tg180^0\,tg45^0}=1.$$

9. СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ДВОЙНОГО УГЛА

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Итак, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. (1)

Задача 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0,6$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

По формуле (1) находим:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0,6)\cos\alpha = -1,2\cos\alpha.$$

Так как $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0,36} = -0,8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1,2\cdot(-0,8) = 0,96$,

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Итак, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. (2)

Задача 2. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0,3$.

Решение: Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 =$$

$$= 2\cdot(0,3)^2 - 1 = -0,82$$

Задача 3. Упростить выражение $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

Решение:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\right)}=\frac{\sin 2\alpha}{2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}tg2\alpha$$

Задача 4. Вычислить $tg2\alpha$, если $tg\alpha=\frac{1}{2}$.

Решение: Полагая в формуле $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ (см. п.8) $\beta=\alpha$, получаем:

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}. \qquad (3)$$

Если $tg\alpha=\frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим:

$$tg2\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}.$$

10. СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА

По известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти значения $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{a}{2}$ получаем:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \qquad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют так же формулами понижения степени.

Если известен $\cos\alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ с точностью до знака. Знак может быть определен, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1. Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0,02$ и $0 < \alpha < \pi$.

Решение: По формуле (5) $\cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0,02}{2} = 0,49$.

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,49} = 0,7$.

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла:

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{7}$$

Задача 2. Вычислить $tg\frac{\alpha}{2}$,если $\cos\alpha = 0,8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Решение: По формуле (7) имеем:

$$tg^2\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-0,8}{1+0,8} = \frac{0,2}{1,8} = \frac{1}{9}.$$

По условию $\pi < a < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $tg\frac{\alpha}{2} < 0$.

Следовательно, $tg\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$.

Задача 3. Упростить выражение $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot ctg^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2}$.

Решение:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos} \cdot ctg^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} ctg^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} \cdot ctg^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Задача 4. Выразить $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ через $tg\frac{\alpha}{2}$.

Решение:

1)

$$\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Итак, $\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$. (8)

2)

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Итак, $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$. (9)

3) $tg\alpha = tg\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Итак, $tg\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$. (10)

Эту формулу можно также получить почленным делением формул (8) и (9). Итак, по формулам (8) – (10) можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\dfrac{\alpha}{2}$.

11. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса рассматриваются для углов от 0^o до 90^o (или от 0^o до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача 1. Вычислить $\sin 870^0$ и $\cos 870^0$.

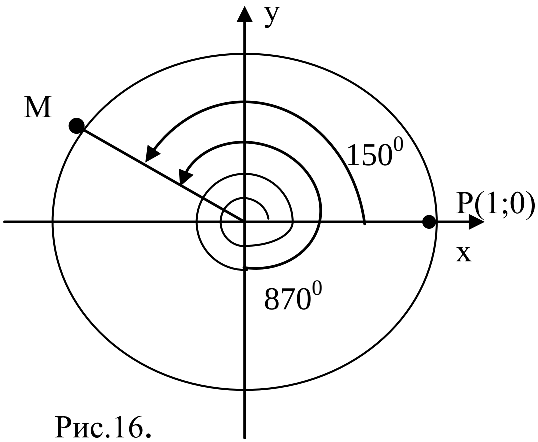

Рис.16.

Решение: Заметим, что $870^0 = 2 \cdot 360^0 + 150^0$. Следовательно, при повороте точка P(1;0) вокруг начала координат на 870^o точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол 150^o, т.е. получится та же самая точка, что и при повороте на 150^o (рис 16)

Поэтому

$\sin 870^0 = \sin 150^0$;

$\cos 870^0 = \cos 150^0$.

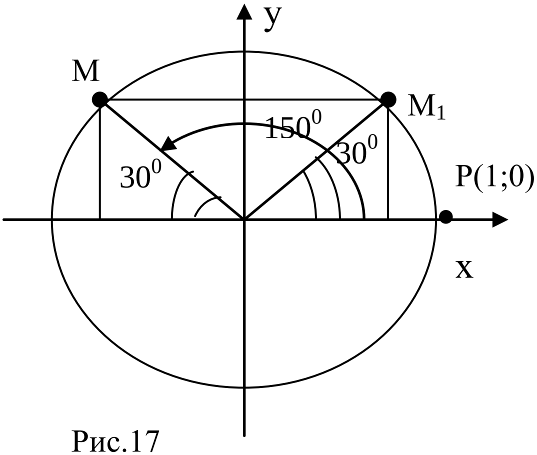

Рис.17

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно от O_y (рис.17).Ординаты точек M и M_1 одинаковы, абсциссы различаются только знаком. Поэтому:

$$\sin 150^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2};$$

$$\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, $\sin 870^0 = \frac{1}{2}, \cos 870^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При решении задачи 1 использовались равенства:

$$\sin\left(2\cdot 360^o + 150^o\right) = \sin 150^o,$$

$$\cos\left(2\cdot 360^o + 150^o\right) = \cos 150^o. \qquad (1)$$

$$\sin\left(180^o - 30^o\right) = \sin 30^o,$$

$$\cos\left(180^o - 30^o\right) = -\cos 30^o. \qquad (2)$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки P (1;0) на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in Z$, получается та же точка, что и при повороте на угол α .

Следовательно, верны формулы:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha \end{cases}, \; k \in Z. \qquad (3)$$

Равенства (2) являются частными случаями формул:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\ . \qquad (4)$$

Докажем формулу $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

Применяя формулу сложения для синуса, получаем:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\sin\alpha=\sin\alpha\ .$$

Аналогично доказывается и вторая из формул (4), которые называются формулами приведения. Вообще, формулами приведения для синуса называют следующие шесть формул:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha\ ,\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha\ ,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\alpha\ ,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha\ . \qquad (5)$$

Следующие шесть формул называют формулами приведения для косинуса:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\ ,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\ ,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha\ ,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha\ ,\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha\ .$$

(6)

Формулы (5) и (6) справедливы при любых значениях α .

Задача 2. Вычислить $\sin 930^0$.

Решение: Используя первую из формул (3), получаем:

$$\sin 930^0 = \sin\left(3\cdot 360^0 - 150^0\right) = \sin\left(-150^0\right).$$

По формуле $\sin\left(-\alpha\right) = -\sin\alpha$ получим $\sin\left(-150^0\right) = -\sin 150^0$. По формуле (4) находим $-\sin 150^0 = -\sin\left(180^0 - 30^0\right) = -\sin 30^0 = -\dfrac{1}{2}$

Итак, $\sin 930^0 = -\dfrac{1}{2}$.

Задача 3. Вычислить $\cos\dfrac{15\pi}{4}$.

Решение:

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Покажем теперь, как можно свести вычисления тангенса любого угла к вычислению тангенса острого угла.

Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $tg(\alpha + 2\pi k) = tg\alpha$, $k \in Z$. Используя это равенство и формулы (4) получаем:

$$tg\left(\alpha+\pi\right) = tg\left(\alpha+\pi-2\pi\right) = tg\left(\alpha-\pi\right) = -tg\left(\pi-\alpha\right) = -\frac{\sin\left(\pi-\alpha\right)}{\cos\left(\pi-\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = tg\alpha$$

Следовательно, справедлива формула

$$tg(\alpha + \pi k) = tg\alpha,\ k \in Z. \qquad (7)$$

Аналогично доказывается формула

$$ctg(\alpha + \pi k) = ctg\alpha,\ k \in Z. \qquad (8)$$

Следующие четыре формулы называются формулами приведения для тангенса и котангенса:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha, \quad tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha,$$

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha, \quad ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha. \qquad (9)$$

Формулы (9) справедливы при всех допустимых значениях α.

Задача 4. Вычислить 1) $tg\frac{11\pi}{3}$; 2) $tg\frac{13\pi}{4}$.

Решение:

1) $tg\frac{11\pi}{3}=tg\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-tg\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$;

2) $tg\frac{13\pi}{4}=tg\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=tg\frac{\pi}{4}=1$.

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются с помощью формул сложения аналогично тому, как доказана первая формула (4). Формулы (9) можно получить из формул (5) и (6), зная, что $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi\pm\alpha$, то замены не происходит.

Например, покажем как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «-», так как если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha<\pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

Итак, формулы (3), (7) и формулы приведения позволяют свести вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к вычислению их значений для острого угла.

12. СУММА И РАЗНОСТЬ СИНУСОВ. СУММА И РАЗНОСТЬ КОСИНУСОВ

Задача 1. Упростить выражение:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

Решение: Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

Эту задачу можно решить проще, если использовать формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

С помощью этой формулы получаем:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$. Тогда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, и поэтому:

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+$$
$$+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Наряду с формулой(1) используется формула разности синусов, а также формулы суммы и разности косинусов:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказывают так же, как и формулы (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$.

Задача 2. Вычислить $\sin 75^0+\cos 75^0$.

Решение:

$$\sin 75^0+\cos 75^0=\sin 75^0+\sin 15^0=2\sin\frac{75^0+15^0}{2}\cos\frac{75^0-15}{2}=$$
$$=2\sin 45^0\cos 30^0=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Задача 3. Преобразовать в произведение $2\sin\alpha+\sqrt{3}$.

Решение:

$$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$