

А.В. Землянко

*Математика.
Алгебра и начала анализа*

Воронеж

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ	6
1.1. Числовая функция.....	6
1.2. График функции	9
1.3. Преобразование графиков функции	13
1.4. Четные и нечетные функции	17
1.5. Возрастание и убывание функций. Экстремумы.....	22
1.6. Общая схема исследования функции	29
ТЕМА 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА.....	37
2.1. Радианная мера угла.....	37
2.2. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла. Основные формулы тригонометрии.....	40
2.3. Графики тригонометрических функций.....	47
2.4. Обратные тригонометрические функции.....	55
2.5. Решение тригонометрических уравнений.....	58
ТЕМА 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ	63
3.1. Приращение функции.....	63
3.2. Понятие производной.....	67
3.3. Правила дифференцирования.....	70
3.4. Производная сложной функции	73
3.5. Производные тригонометрических функций.....	78
3.6. Применение производных к исследованию функции	83
ТЕМА 4. ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	91
4.1. Определение первообразной. Основное свойство первообразной. Правила вычисления первообразной.....	91
4.2. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл.	99
ТЕМА 5. СТЕПЕНИ И КОРНИ.....	105
5.1. Корень n -степени. Степень с действительным показателем	105
5.2. Показательная функция, ее свойства и график.....	111

5.3. Решение показательных уравнений	117
5.4. Логарифмы, их свойства	122
5.5. Логарифмическая функция, ее свойства и график	129
5.6. Логарифмические уравнения.....	135
ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И	
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И	
ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ	139
6.1. Производная показательной функции. Число e	139
6.2. Производная логарифмической функции	143
6.3. Первообразная показательной функции.....	147

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

1.1. Числовая функция

1. Соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y , называется

_____.

2. Как обозначаются числовые функции?

_____.

3. Областью определения функции называется

_____.

_____.

4. Множеством значения функции называется

_____.

_____.

5. Перечислите известные вам числовые функции, запишите для них D и E .

_____.

_____.

_____.

_____.

_____.

6. Функция вида $f(x)=P(x)$, где $P(x)$ – многочлен, называется _____, а функция вида $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, называется _____.

_____.

7. Какие из перечисленных функций являются рациональными, а какие – дробно-рациональными?

$$y=x^2-3x+1 \text{ _____}; \quad y=\frac{3x}{x-2} \text{ _____};$$

$$y=\frac{3}{x}-1 \text{ _____}; \quad y=x^3-4x \text{ _____};$$

$$y=\frac{x^2-4x}{2x} \text{ _____}; \quad y=\frac{x^2-16x}{x-4} \text{ _____}.$$

8. а) $f(x)=\frac{1}{2}x-2$;

$D(f)=$ _____;
 $E(f)=$ _____.

б) $f(x)=3-\frac{1}{x}$;

$D(f)=$ _____;
 $E(f)=$ _____.

в) $f(x)=x^2-4x+4$;

$D(f)=$ _____;
 $E(f)=$ _____.

г) $f(x)=\sqrt{x-2}$;

$D(f)=$ _____;
 $E(f)=$ _____.

9. Для того чтобы найти значение данной функции в какой-либо точке ее области определения, необходимо

10. Заданы функции вида $y=f(x)$. Вычислите для этих функций следующие значения:

а) $f(x)=x+1$;

$f(1)=$ _____

$f(t)=$ _____

$f(2x+1)=$ _____

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) =$ _____

$f(x-1)=$ _____

$f(-2)=$ _____

$f(x^2)=$ _____

$5f\left(\frac{x}{5}\right) =$ _____

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{x};$$

$$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(2x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x^2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5f\left(\frac{x}{5}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{в) } f(x) = x^2;$$

$$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(2x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x^2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5f\left(\frac{x}{5}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{г) } f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(2x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(x^2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5f\left(\frac{x}{5}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

1.2. График функции

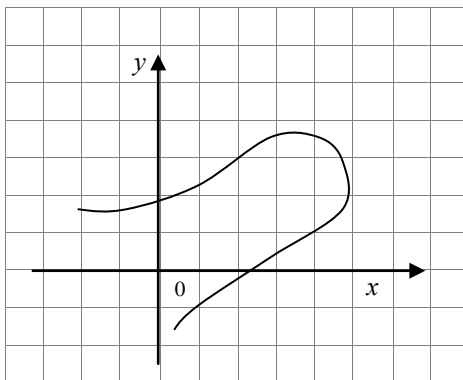
1. Ось Ox называют осью _____.

Ось Oy называют осью _____.

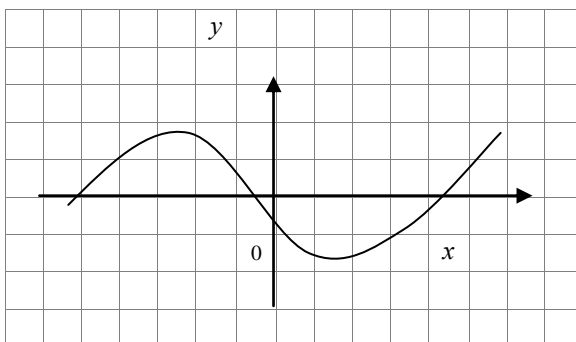
2. Графиком функции f называют _____

3. Какое из множеств точек, изображенных на рисунках, не является графиком функции, ответ обоснуйте.

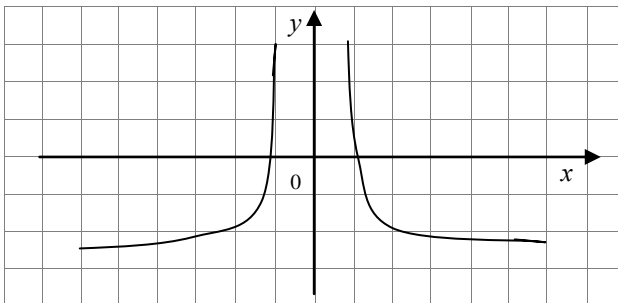
а)



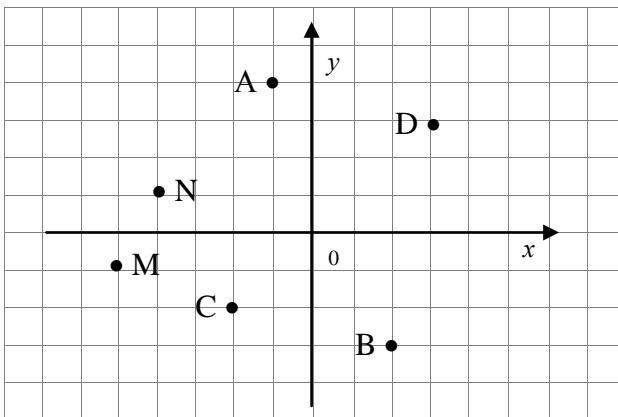
б)



В)



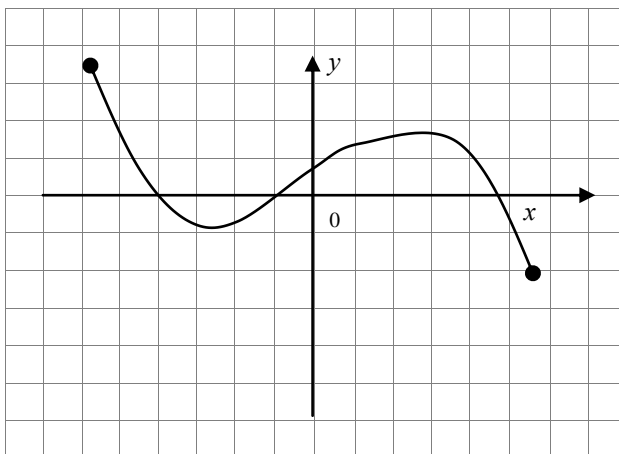
4.



- Точка А имеет координаты _____ ;
Точка В имеет координаты _____ ;
Точка С имеет координаты _____ ;
Точка D имеет координаты _____ ;
Точка М имеет координаты _____ ;
Точка N имеет координаты _____ .

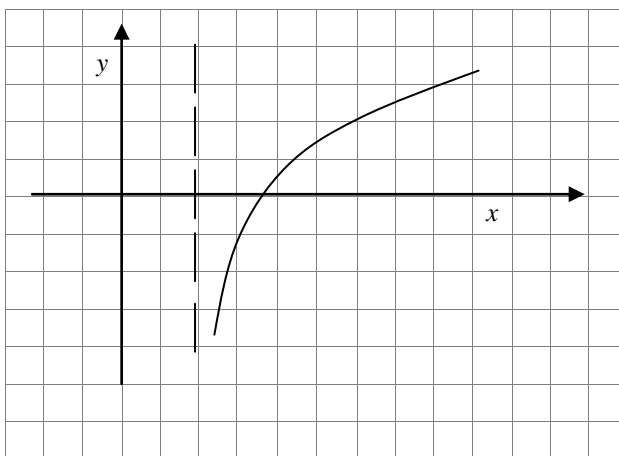
5. Укажите область определения и область значений функций, графики которых изображены на рисунке.

а)



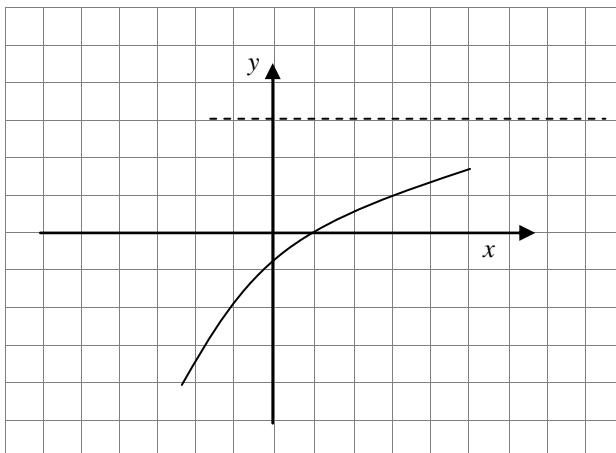
$D(f) =$ _____; $E(f) =$ _____.

б)



$D(f) =$ _____; $E(f) =$ _____.

B)



$D(f) =$ _____; $E(f) =$ _____.

1.3. Преобразование графиков функции

1. Для построения графика функции $y=f(x)+b$, где b – постоянное число, необходимо _____

2. Для построения графика $y=kf(x)$ необходимо

Если $|k|>1$, то это _____.

Если $0<|k|<1$, то это _____.

3. График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции

Если $a>0$, то _____.

Если $a<0$, то _____.

4. Для построения графика функции $y=f\left(\frac{x}{k}\right)$ необходимо

Для построения графика функции $y=f(kx)$ необходимо

5. График функции $y=-f(x)$ можно получить

6. График функции $y=|f(x)|$ можно получить

7. Дан график функции f . В этой же системе координат постройте графики следующих функций:

а) $y=f(x)+1$;

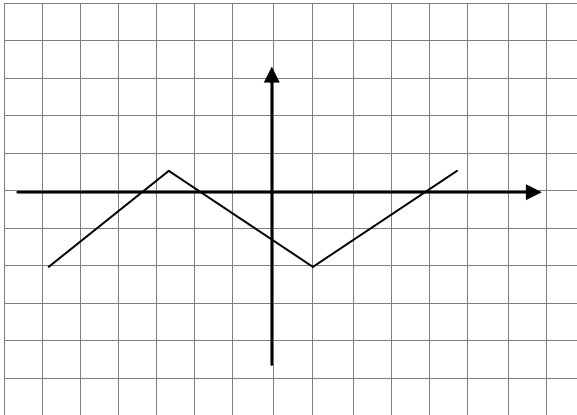
б) $y=f(x-2)$;

в) $y=2f(x)$;

г) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;

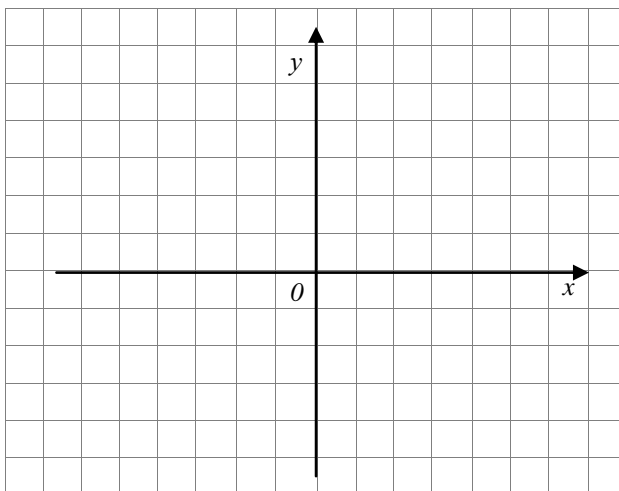
д) $y=|f(x)|$;

е) $y=-f(x)$.



8. В одной и той же системе координат постройте графики функций:

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1}{x+2}$; 3) $y = 3 + \frac{1}{x+2}$.



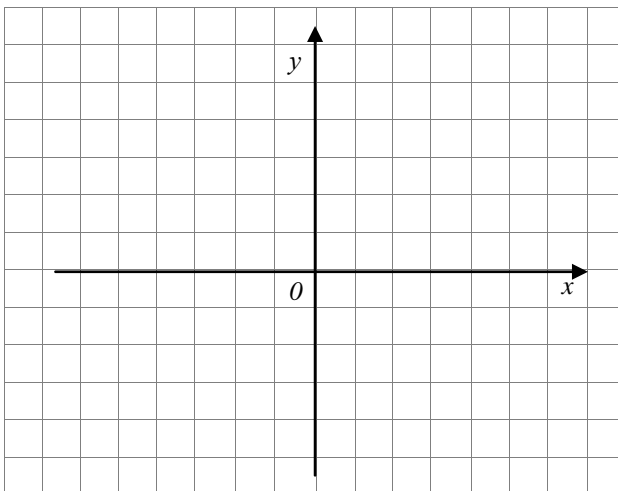
9. Запишите, при помощи каких преобразований из графика $y = x^2$ можно получить график $y = -3 - (x+2)^2$.

а) _____

б) _____

в) _____

10. Используя преобразования графика, постройте график функции $y = \left| \frac{(x-1)^3}{3} + 2 \right|$.



1.4. Четные и нечетные функции

1. Функция f называется четной, если _____

2. Функция f называется нечетной, если _____

3. Функция f называется функцией общего вида, если _____

4. Для исследования функции на четность-нечетность необходимо _____

5. Из перечисленных ниже функций выберите четные, нечетные и функции общего вида:

а) $y = x^2 - 1$;

б) $y = \frac{2}{x} + x$;

в) $y = 2x - 3$;

г) $y = 3x^3 - 1$;

д) $y = \frac{x^4 - 2}{5 + 3x^2}$;

е) $y = \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x}$.

Четные: _____

Нечетные: _____

Функции общего вида: _____

6. Исследуйте функции на четность-нечетность, запишите результат:

а) $f(x)=3x^2-x$ – функция _____
_____;

б) $f(x)=\sqrt{2-x}$ – функция _____
_____;

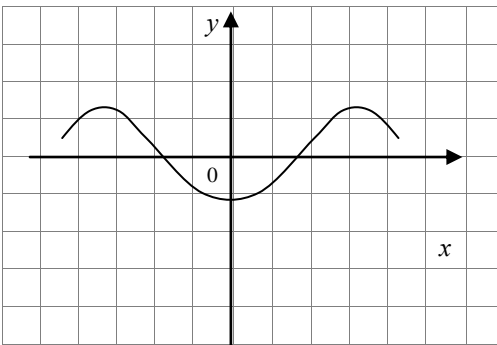
в) $f(x)=\frac{x^2}{x^4-5}$ – функция _____
_____;

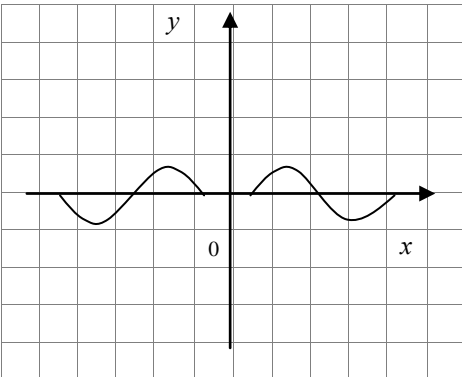
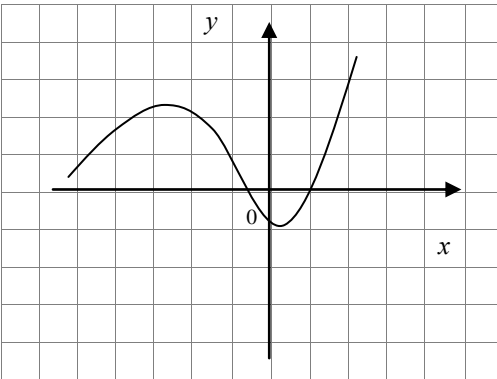
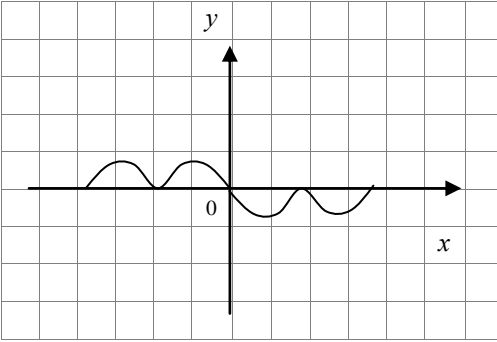
г) $f(x)=3x^3-x$ – функция _____
_____;

д) $f(x)=x^3(2x^2-x)$ – функция _____
_____;

е) $f(x)=\frac{3x^3}{8-x^5}$ – функция _____
_____.

7. Определите четность-нечетность функций, графики которых изображены на рисунках.



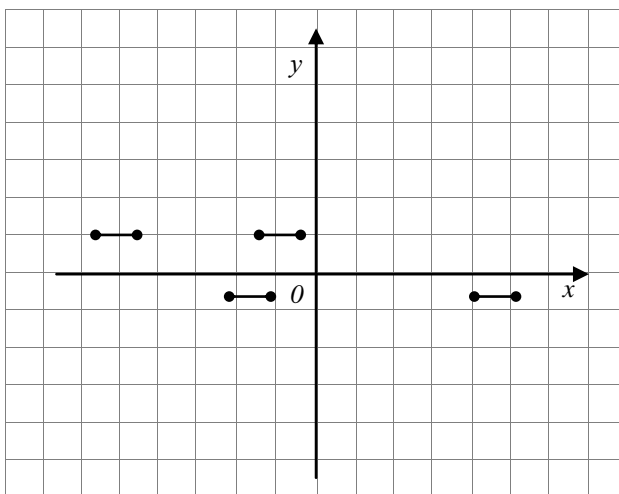


8. Соединив чертой, составьте верное высказывание:

график четной функции	не имеет симметрии относительно осей координат
график нечетной функции	симметричен относительно оси ординат
график функции общего вида	симметричен относительно начала координат

9. На рисунке изображена зависимость $y=f(x)$. Укажите верное утверждение:

- а) $f(x)$ есть четная функция;
 - б) $f(x)$ есть нечетная функция;
 - в) $f(x)$ есть функция общего вида;
 - г) $f(x)$ не является функцией.
-



10. Произведение двух нечетных функций есть функция

Частное двух нечетных функций есть функция

Произведение четной и нечетной функции есть функция

Частное нечетной и четной функции есть функция

1.5. Возрастание и убывание функций. Экстремумы

1. Функция f возрастает на множестве P , если _____

2. Функция f убывает на множестве P , если _____

3. $x_2 > x_1$ } \Rightarrow функция _____;
 $f(x_2) > f(x_1)$

$x_2 > x_1$ } \Rightarrow функция _____.
 $f(x_2) < f(x_1)$

4. Промежутками монотонности функции называются

5. Окрестностью точки a называется _____

6. Точка x_0 называется точкой минимума функции f , если

8. Точка x_0 называется точкой максимума функции f , если

7. Функция $y=f(x)$ задана графиком на промежутке $[-5; 5]$.

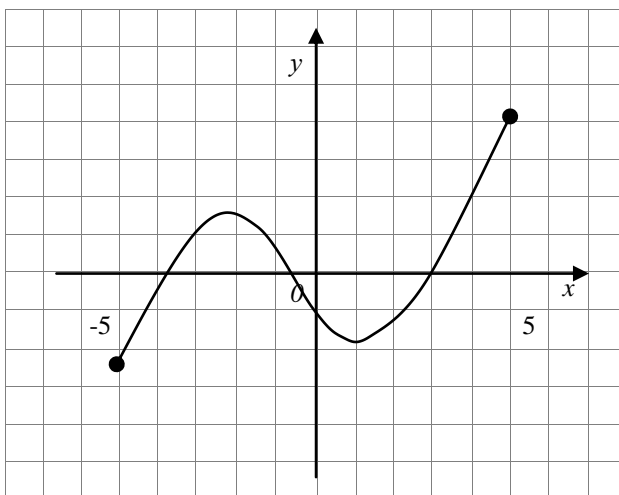
Укажите:

а) промежутки возрастания функции

б) промежутки убывания функции

в) наибольшее значение функции

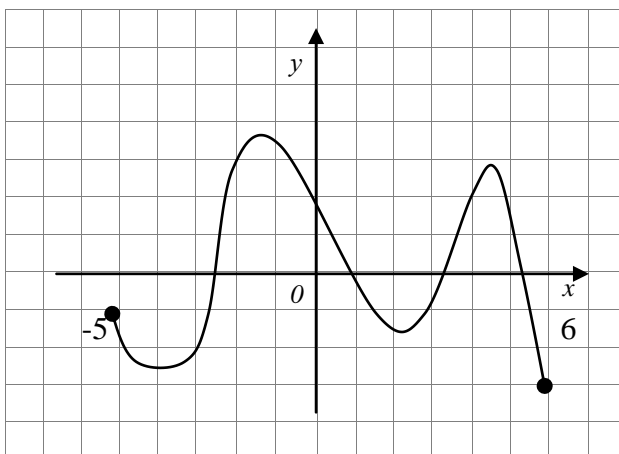
г) наименьшее значение функции.



9. Функция $y=f(x)$ задана графиком на промежутке $[-5;6]$.

Укажите:

- а) точки минимума функции _____;
- б) точки максимума функции _____;
- в) значение функции в точках минимума _____;
- г) значение функции в точках максимума _____;
- д) перечислить экстремумы функции _____;
- е) интервалы возрастания функции _____;
- ж) интервалы убывания функции _____;
- з) наибольшее значение функции _____;
- и) наименьшее значение функции _____.



10. Построить эскиз графика функции, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f)=\mathbb{R}$;

б) $E(f)=[-2; -1]$;

в) функция возрастает на интервалах $[-2;0]$ \cup $[2;+\infty)$;

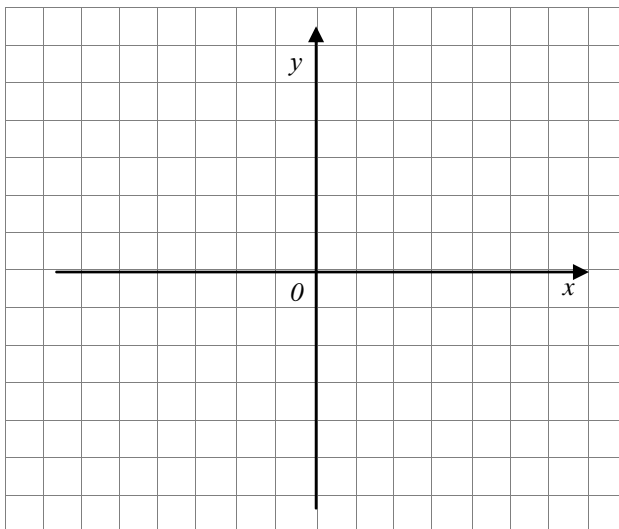
г) функция убывает на $(-\infty;-2]$ \cup $[0;2]$;

д) $x_{\min}=-2$; $f_{\min}=-2$;

$x_{\min}=2$; $f_{\min}=-2$;

$x_{\max}=0$; $f_{\max}=-1$;

е) функция является четной.



11. Если на множестве P большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция называется

12. Если на множестве P большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция называется

13. Точка, в которой возрастание функции меняется на убывание, называется _____.

Значение функции в этой точке называется _____.

14. Точка, в которой убывание функции меняется на возрастание, называется _____.

Значение функции в этой точке называется _____.

15. Экстремумами функции называются _____.

16. Функция $y=f(x)$ задана графиком.

Опишите свойства функции:

а) $D(f)=$ _____;

б) $E(f)=$ _____;

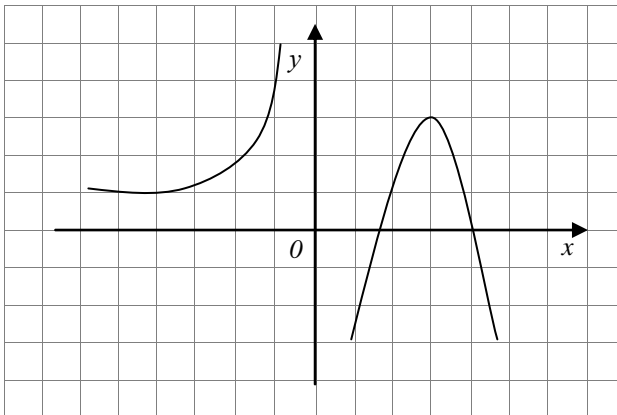
в) функция возрастает при $x \in$ _____;

г) функция убывает при $x \in$ _____;

д) $x_{min}=$ _____; $f_{min}=$ _____;

$x_{max}=$ _____; $f_{max}=$ _____;

е) перечислите точки пересечения графика функции с осями координат _____.



17. Укажите функции, имеющие экстремумы, и определите вид экстремума, если таковой существует:

а) $f(x)=2x+3$

_____ ;
_____ ;

б) $f(x)=3x^2+4x-6$

_____ ;
_____ ;

в) $f(x)=x^3-4$

_____ ;
_____ ;

г) $f(x)=\frac{3}{x}+1$

_____ ;
_____ ;

д) $f(x)=4-x^2$

_____ ;
_____ ;

18. Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$, $x_1, x_2 \in D(f)$, причем $x_2 > x_1$.

Если $f(x_2)-f(x_1) > 0$, то функция _____.

Если $f(x_2)-f(x_1) < 0$, то функция _____.

19. Найдите промежутки монотонности следующих функций:

а) $f(x)=3-\frac{x}{2}$

_____ ;
_____ ;

$$\text{б) } f(x) = (x-2)^2$$

_____ ;
_____ ;

$$\text{в) } f(x) = 3 - \frac{2}{x}$$

_____ ;
_____ ;

$$\text{г) } f(x) = 3 - x^2$$

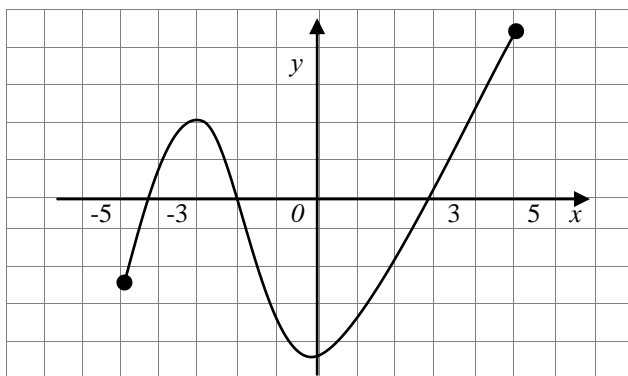
_____ ;
_____ ;

$$\text{д) } f(x) = 1 - x^3$$

_____ ;
_____ ;

20. Дан график функции $y=f(x)$ на отрезке $[-5; 5]$. Какое из утверждений верно:

- а) $x=2$ – точка максимума функции $f(x)$;
- б) $x=-3$ – точка максимума функции $f(x)$;
- в) $x=3$ – точка максимума функции;
- г) $x=5$ – точка максимума функции.



1.6. Общая схема исследования функции

1. Областью определения функции называется

2. Асимптотой графика функции называют

3. Укажите вертикальные асимптоты графика функции, если таковые имеются:

а) $f(x) = 2 - \frac{1}{x-2}$ $x =$ _____;

б) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ $x =$ _____;

в) $f(x) = 4 - \frac{8x}{5}$ $x =$ _____;

г) $f(x) = \frac{3x-1}{x^3}$ $x =$ _____;

д) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ $x =$ _____.

4. Для исследования функции на четность-нечетность, необходимо _____

5. Дана функция $y=f(x)$. Корни уравнения $f(x)=0$ называются

6. Для того чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox , нужно _____.

Для того чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Oy , нужно _____.

7. Промежутки знакопостоянства функции – это промежутки, на которых _____.

8. Если на некотором промежутке $f(x) > 0$, то график функции расположен _____.

Если на некотором промежутке $f(x) < 0$, то график функции расположен _____.

9. Сформулируйте метод интервалов _____

_____.

10. График функции в точке максимума имеет вид _____.

В окрестности точки минимума графики изображаются в виде _____.

11. Найдите область определения следующих функций:

а) $f(x) = \sqrt{2 - x}$

_____;

$$\text{б) } f(x) = 3x - \frac{1}{x+2}$$

_____ ;
_____ ;

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x}{x^3 + 1}$$

_____ ;
_____ .

12. Исследуйте функцию на четность–нечетность

$$\text{а) } f(x) = \frac{2-x^2}{x};$$

$f(-x) =$ _____ ;
_____ ;

$$\text{б) } f(x) = 3x^2 - 4x^4;$$

$f(-x) =$ _____ ;
_____ ;

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x}{5-x};$$

$f(-x) =$ _____ ;
_____ .

13. Найдите точки пересечения графиков следующих функций с осями координат:

$$\text{а) } f(x) = (x-2)^2; \quad Ox: \text{_____}; \quad Oy: \text{_____};$$

$$\text{б) } f(x) = 3 - \frac{1}{x-3}; \quad Ox: \text{_____}; \quad Oy: \text{_____};$$

$$\text{в) } f(x) = x^2 - \frac{2}{x}; \quad Ox: \text{_____}; \quad Oy: \text{_____};$$

14. Найдите для функции $y=f(x)$ промежутки знакопостоянства:

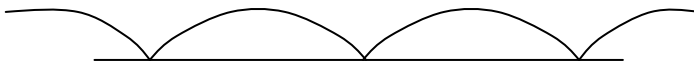
а) $f(x)=x^2(x-2)^2$



б) $f(x)=\frac{2x^2}{3-x}$



в) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$



15. Исследуйте на монотонность следующие функции:

а) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{1}{2}$; $f(x)$ ↗ при $x \in$ _____; $f(x)$ ↘ при $x \in$ _____

_____ ;

б) $f(x) = 2 - \frac{x}{2}$; $f(x)$ ↗ при $x \in$ _____; $f(x)$ ↘ при $x \in$ _____

_____ ;

в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $f(x)$ ↗ при $x \in$ _____; $f(x)$ ↘ при $x \in$ _____

_____ .

16. Найдите экстремумы следующих функций:

а) $f(x) = 3x - 1$

_____ ;

б) $f(x) = 4x - x^2$

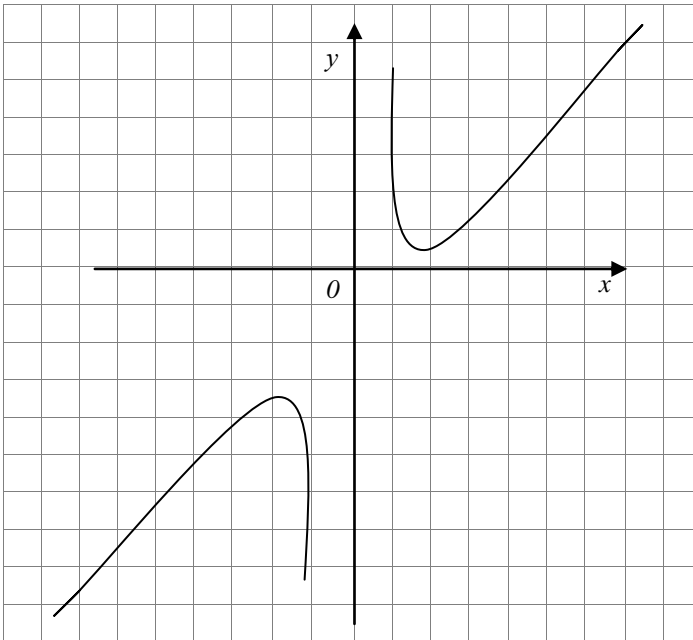
_____ ;

в) $f(x) = x^2 + 5x + 4$

_____ .

17. Функция $y=f(x)$ задана графиком. Опишите свойства этой функции по общей схеме:

- а) $D(f)=$ _____; $E(f)=$ _____;
- б) функция является _____;
- в) точки пересечения с осями: Ox : _____; Oy : _____;
- г) промежутки знакопостоянства функции:
 $f(x)>0$ при $x \in$ _____;
 $f(x)<0$ при $x \in$ _____;
- д) промежутки монотонности функции:
 $f(x) \nearrow$ при $x \in$ _____;
 $f(x) \searrow$ при $x \in$ _____;
- е) экстремумы функции
 $x_{max}=$ _____; $f_{max}=$ _____;
 $x_{min}=$ _____; $f_{min}=$ _____;
- ж) асимптоты графика функции
 $x=$ _____; $y=$ _____.



18. Постройте график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f) = \mathbb{R}; E(f) = \mathbb{R};$

б) функция общего вида;

в) $Ox : (-3; 0); (1; 0);$

$Oy : (0; 1);$

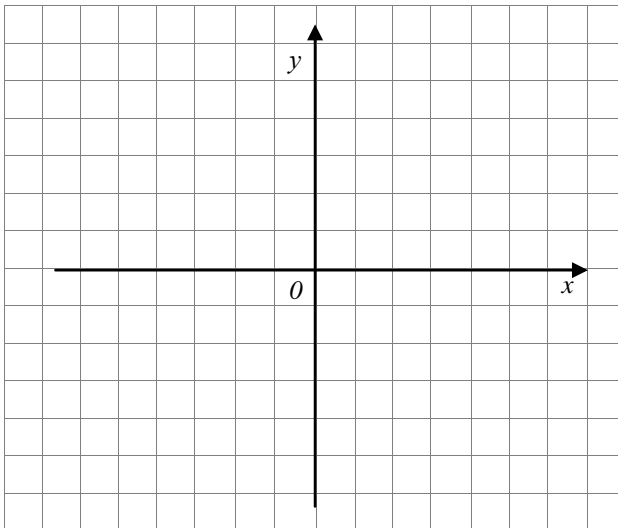
г) $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -3);$

$f(x) > 0$ при $x \in (-3; 1) \cup (1; \infty);$

д) $f(x) \nearrow$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty);$

$f(x) \searrow$ при $x \in [-1; 1];$

е) $x_{\max} = -1; f_{\max} = 4; x_{\min} = 1; f_{\min} = 0.$



19. Вычислите асимптоты графика функции $y=f(x)$:

а) $f(x) = \frac{2x}{3+x}$ _____
_____;

б) $f(x) = 3 - \frac{2}{x-4}$ _____
_____;

в) $f(x)=4x-5$ _____.

20. Найдите область значений следующих функций:

а) $f(x) = 3 - \frac{2}{x+4}$

_____;

б) $f(x) = x^2 - 3x$

_____;

в) $f(x) = 12 - 2x$

_____;

г) $f(x) = 2 + \sqrt{x+3}$

_____.

ТЕМА 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

2.1. Радианная мера угла

1. Углом в 1 радиан называют _____

2. $1 \text{ рад} \approx \text{_____}^{\circ}$.

3. Угол в α радиан равен _____ градусов.

Радианная мера угла в α градусов равна _____

4. Выразите в радианах:

$1^{\circ} = \text{_____}$; $10^{\circ} = \text{_____}$; $15^{\circ} = \text{_____}$; $30^{\circ} = \text{_____}$;
 $45^{\circ} = \text{_____}$; $60^{\circ} = \text{_____}$; $70^{\circ} = \text{_____}$; $90^{\circ} = \text{_____}$;
 $120^{\circ} = \text{_____}$; $135^{\circ} = \text{_____}$; $150^{\circ} = \text{_____}$; $210^{\circ} = \text{_____}$;
 $225^{\circ} = \text{_____}$; $240^{\circ} = \text{_____}$; $320^{\circ} = \text{_____}$; $330^{\circ} = \text{_____}$.

5. Выразите в градусах:

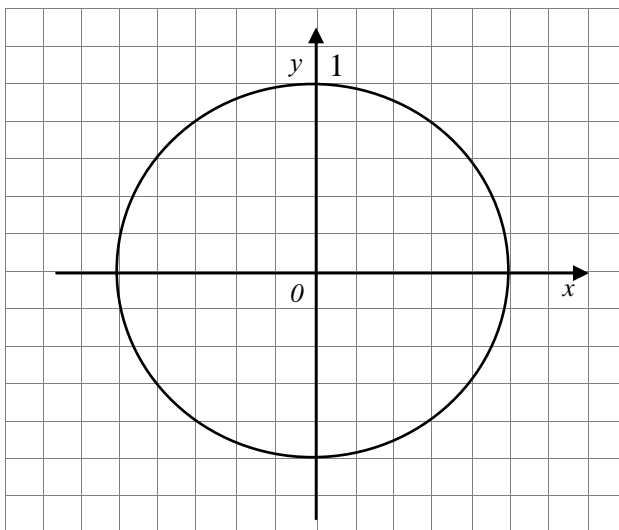
$\frac{\pi}{15} = \text{_____}$; $\frac{\pi}{12} = \text{_____}$; $\frac{\pi}{8} = \text{_____}$;
 $\frac{7\pi}{9} = \text{_____}$; $\frac{2\pi}{3} = \text{_____}$; $\frac{11\pi}{6} = \text{_____}$;
 $1,5\pi = \text{_____}$; $3\pi = \text{_____}$; $0,25\pi = \text{_____}$;
 $\frac{21}{4}\pi = \text{_____}$; $\frac{31}{6}\pi = \text{_____}$; $\frac{101}{12}\pi = \text{_____}$.

6. Единичной окружностью называют окружность _____

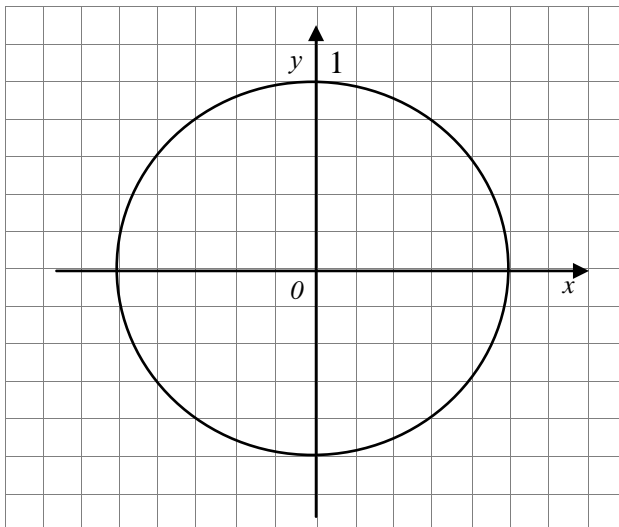
7. За положительное направление движения точки по единичной окружности принимают _____

За отрицательное направление движения точки по единичной окружности принимают _____

8. На единичной окружности постройте угол $-\alpha$, если α имеет следующее значение: -30° ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; -270° ; 15° .



9. На единичной окружности постройте точку P_t , соответствующую следующим значениям t : $t = \frac{11}{2}\pi$; $t = -3\pi$; $t = 45^\circ$; $t = -405^\circ$; $t = 5\pi$; $t = -1035^\circ$.



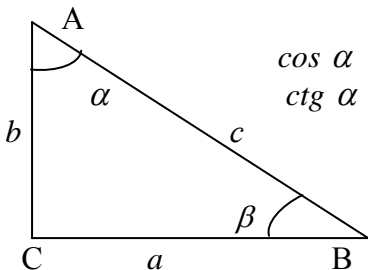
10. Для каждого из приведенных значений t укажите такое значение t' , при котором точки P_t и $P_{t'}$:

- а) диаметрально противоположны;
- б) симметричны относительно оси OX ;
- в) симметричны относительно оси OY ;

$t \backslash t'$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
а)						
б)						
в)						

2.2. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла. Основные формулы тригонометрии.

1.



$$\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. Синусом угла α называют _____

Косинусом угла α называют _____

Тангенсом угла α называют _____

Котангенсом угла α называют _____

3. Как связаны между собой?

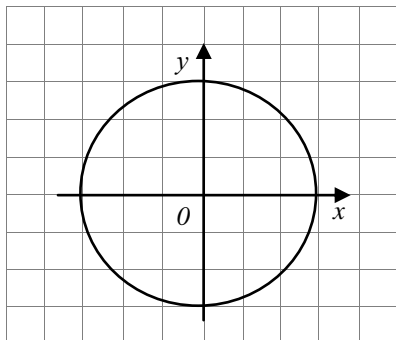
а) Тангенс и котангенс одного и того же угла _____

б) Тангенс и косинус одного и того же угла _____

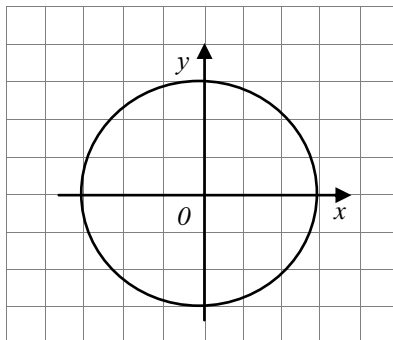
в) Котангенс и синус одного и того же угла _____

4. Проставьте знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

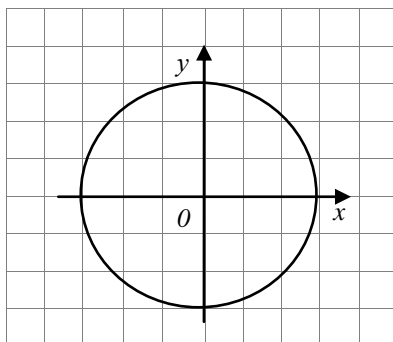
$\sin \alpha$



$\cos \alpha$



$\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$

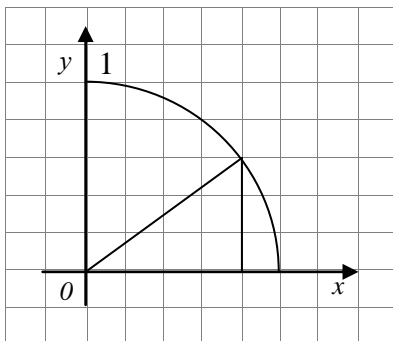


5. В какой четверти угол α , если:

$\alpha = 283^\circ$ _____; $\alpha = -20^\circ$ _____; $\alpha = 4200^\circ$ _____;
 $\alpha = 179^\circ$ _____; $\alpha = -325^\circ$ _____; $\alpha = -800^\circ$ _____.

6. $\sin(-\alpha) =$ _____; $\cos(-\alpha) =$ _____;
 $\operatorname{tg}(-\alpha) =$ _____; $\operatorname{ctg}(-\alpha) =$ _____.

7. Используя единичную окружность, докажите основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



8. Из основного тригонометрического тождества следует, что
 $\sin \alpha =$ _____;
 $\cos \alpha =$ _____.

9. Найдите значение выражения:

$\sin(-30^\circ) =$ _____; $\cos(-60^\circ) =$ _____; $\operatorname{tg}(-45^\circ) =$ _____;
 $\operatorname{ctg}(-30^\circ) =$ _____; $\cos(-90^\circ) =$ _____; $\sin(-45^\circ) =$ _____.

10. Вычислите:

а) $2 \cos 60^\circ + \sqrt{3} \cos 60^\circ =$ _____;

б) $5 \sin 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ =$ _____;

в) $3 \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ =$ _____;

г) $2 \sin 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ =$ _____;

д) $7 \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ =$ _____.

11. Формулами сложения называются формулы вида

12. Запишите формулы, выражающие тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов.

13. Проставьте знаки «+» или «-» в выражениях, чтобы получилось верное равенство:

$$\cos \alpha \cos \beta \quad \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta);$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha \quad \beta);$$

$$\cos \alpha \sin \beta \quad \cos \beta \sin \alpha = \sin(\beta + \alpha);$$

$$\sin \beta \sin \alpha + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha \quad \beta);$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \quad \beta) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1}.$$

14. Запишите формулы двойного угла.

15. Формулами приведения называют формулы вида

16. Запишите общее правило приведения.

17. Запишите формулы половинного угла:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \text{_____}; \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \text{_____}; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \text{_____};$$

18. Используя мнемоническое правило, заполните таблицу:

угол \ функция	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
<i>sin</i>								
<i>cos</i>								
<i>tg</i>								
<i>ctg</i>								

19. Допишите формулу.

$$\sin \alpha + \sin \beta = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\underline{\hspace{4cm}} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\underline{\hspace{4cm}} = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \underline{\hspace{4cm}}$$

20. Вычислите:

а) $3 + 8 \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\frac{24 \sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ \cdot \cos 28^\circ}{\cos 34^\circ}$;

в) $\frac{5 \operatorname{ctg} \left(\alpha + \frac{7\pi}{2} \right)}{4 \operatorname{tg} \left(\alpha + 3\pi \right)}$, если $\alpha = \frac{5\pi}{4}$;

г) $\frac{3\cos\alpha + 3\sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 5$;

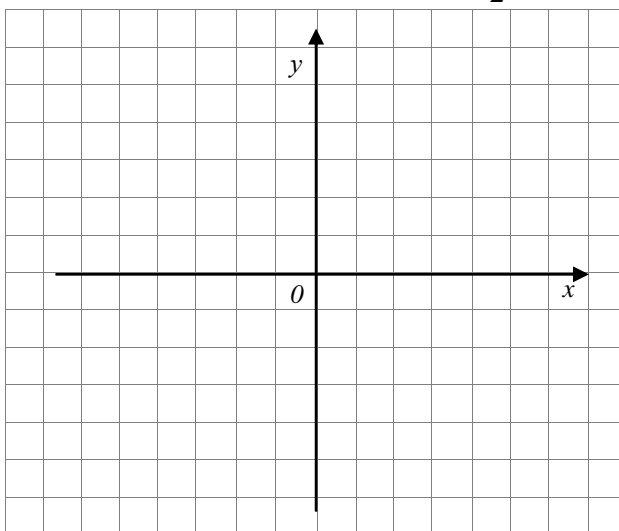
д) $\sqrt{3}(\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ)$.

2.3. Графики тригонометрических функций

1. Функция называется периодической с периодом $T \neq 0$, если

2. Что можно сказать про график периодической функции?

3. В одной и той же системе координат начертите графики периодических функций с периодом $T=2$; $T=\frac{1}{2}$; $T=5$.

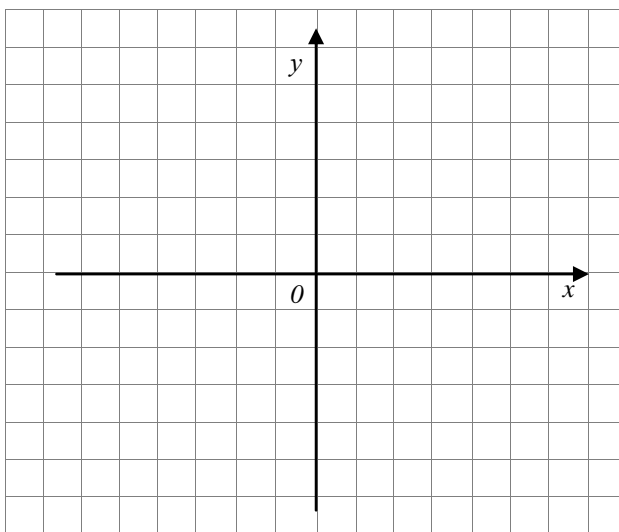


4. Какие периодические функции вам известны?

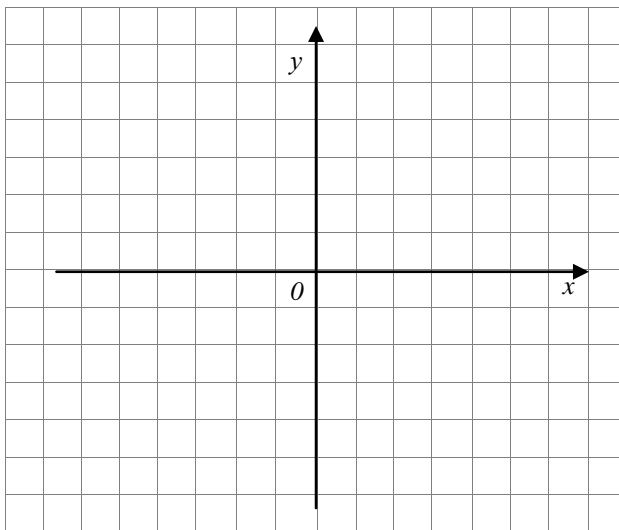
5. $\sin(x+360^0)=$ _____; $\cos(x-6\pi)=$ _____;
 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+3\pi\right)=$ _____; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-450^0\right)=$ _____.

6. Изобразите графики функций:

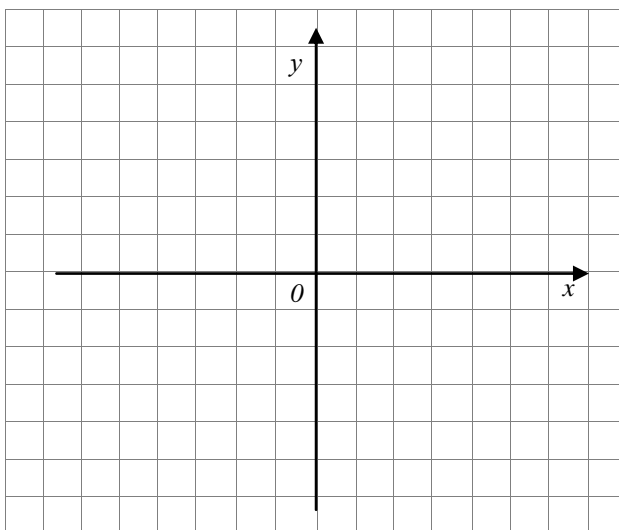
а) $y=\cos x$;



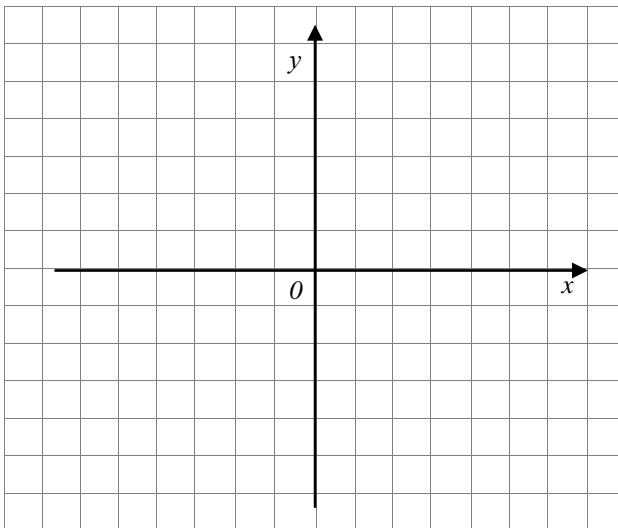
б) $y = \sin x$;



в) $y = \operatorname{ctg} x$;

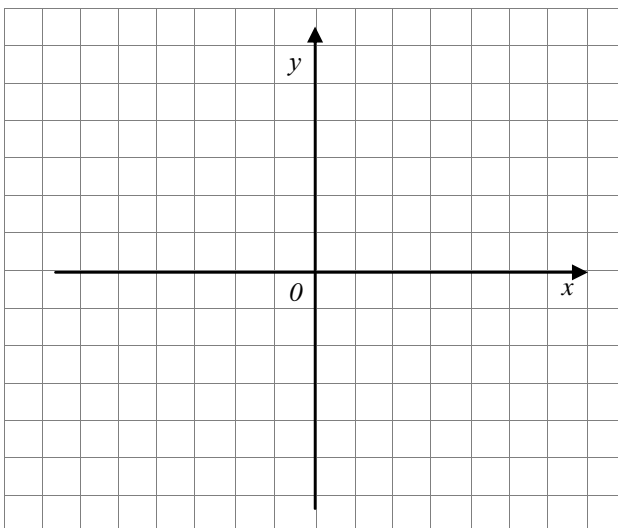


г) $y = \operatorname{tg} x$.

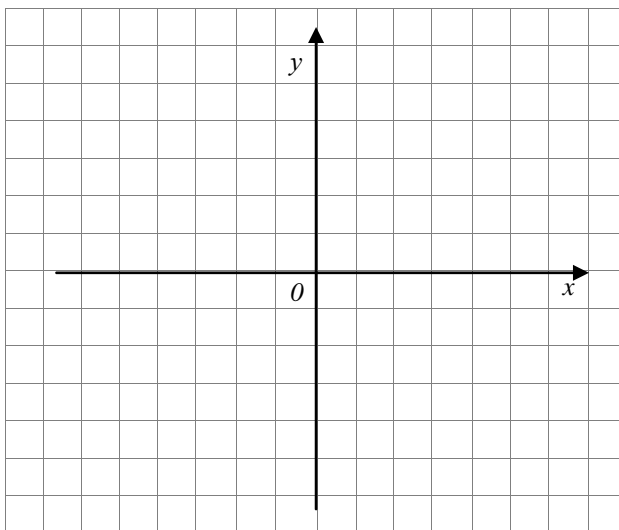


7. Изобразите график тригонометрической функции, имеющей свойства:

а) $E(f) = [-1; 1]$; функция четная;

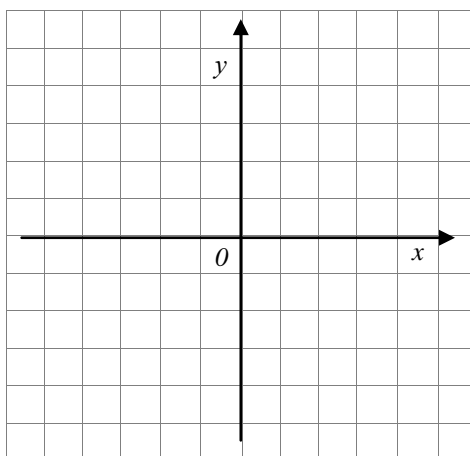


б) $T = \pi$; функция убывает при $x \in D(f)$.

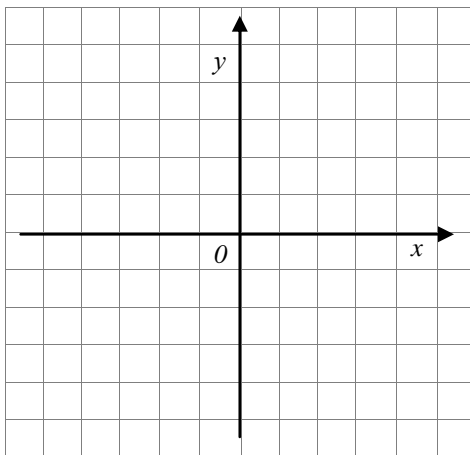


8. Используя преобразования графика, постройте графики следующих функций:

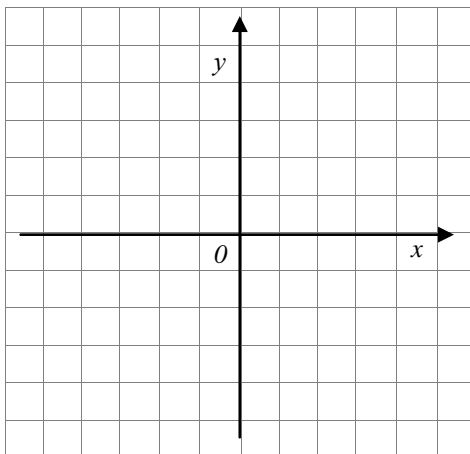
а) $y = -\operatorname{tg}x$;



б) $y = 3 + \operatorname{ctg} x$;



в) $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;



9. Заполните таблицу.

	Функция			
	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f(x)=\operatorname{ctg} x$
1.1.				
1.2.				
2.1.				
2.2.				
3.1.				
3.2.				
4.1.				
4.2.				
5.1.				
5.2.				
6.1.				
6.2.				
6.3.				
6.4.				

1.1. – $D(f)$;

1.2. – $E(f)$;

2.1. – четность (нечетность);

2.2. – наименьший положительный период;

3.1. – координаты точек пересечения графика с осью Ox ;

3.2. – координаты точек пересечения графика с осью Oy ;

4.1. – промежутки, на которых $f(x) > 0$;

4.2. – промежутки, на которых $f(x) < 0$;

5.1. – промежутки возрастания;

5.2. – промежутки убывания;

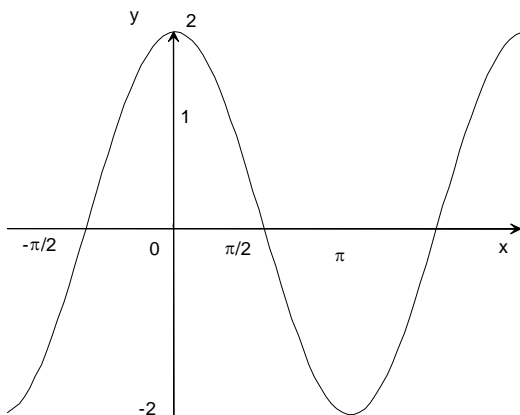
6.1. – точки минимума;

6.2. – минимумы функции

6.3. – точки максимума;

6.4. – максимумы функции.

10.



Запишите формулой, график какой функции изображен на рисунке.

2.4. Обратные тригонометрические функции

1. Сформулируйте теорему о корне.

2. $f(x) = \sin x, f(x)$ ↗ при $x \in$ _____ ;
 $f(x) = \cos x, f(x)$ ↘ при $x \in$ _____ ;
 $f(x) = \operatorname{tg} x, f(x)$ ↗ при $x \in$ _____ ;
 $f(x) = \operatorname{ctg} x, f(x)$ ↘ при $x \in$ _____ .

3. Арксинусом числа a называется _____

4. Арккосинусом числа a называется _____

5. Арктангенсом числа a называется _____

6. Арккотангенсом числа a называется _____

7. Заполните таблицу:

	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>arcsin</i>								
<i>arccos</i>								
<i>arctg</i>								
<i>arcctg</i>								

8. Вычислите:

$$\sin(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\sin(\arcsin(-\frac{1}{2})) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad -\cos(\arccos(-\frac{1}{2})) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\arccos(\cos \frac{\sqrt{2}}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \cos(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\arctg(\tg \frac{\pi}{6}) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \tg(\arctg \sqrt{3}) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$-\tg(\arctg 2) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \ctg(\arcctg(-2)) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$-\arcctg(\ctg \frac{\pi}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \arcctg(\ctg(-1)) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

9. Вычислите:

а) $\arccos(-1) - 2 \arcctg 0 = \underline{\hspace{4cm}};$

б) $\arcsin(-1) + 2 \arctg 0 = \underline{\hspace{4cm}};$

в) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arctg \sqrt{3} = \underline{\hspace{4cm}};$

$$\text{г) } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \underline{\hspace{10cm}};$$

$$\text{д) } \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \underline{\hspace{10cm}};$$

$$\text{е) } \arccos\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \underline{\hspace{10cm}}.$$

10. Вычислите:

$$\text{а) } \arccos\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) - 2 \arcsin 1 = \underline{\hspace{10cm}};$$

$$\text{б) } \arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) + 2 \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\hspace{10cm}};$$

$$\text{в) } \sin\left(2 \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = \underline{\hspace{10cm}};$$

$$\text{г) } \cos\left(2 \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\hspace{10cm}};$$

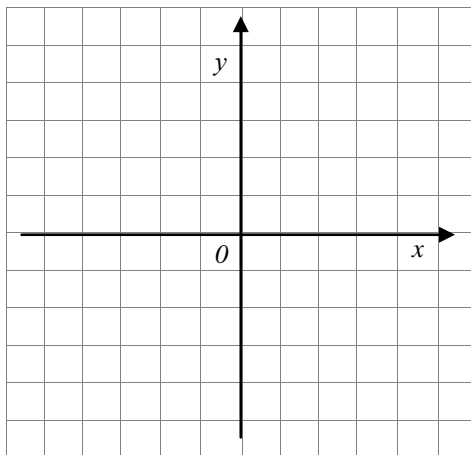
$$\text{д) } \arccos(\sin(\operatorname{arctg} 0)) = \underline{\hspace{10cm}};$$

$$\text{е) } \arcsin(\cos(\operatorname{arctg} 0)) = \underline{\hspace{10cm}}.$$

2.5. Решение тригонометрических уравнений

1. Простейшим тригонометрическим уравнением называют уравнение вида _____.

2. Решите графически уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.



3. Запишите решение следующих уравнений:

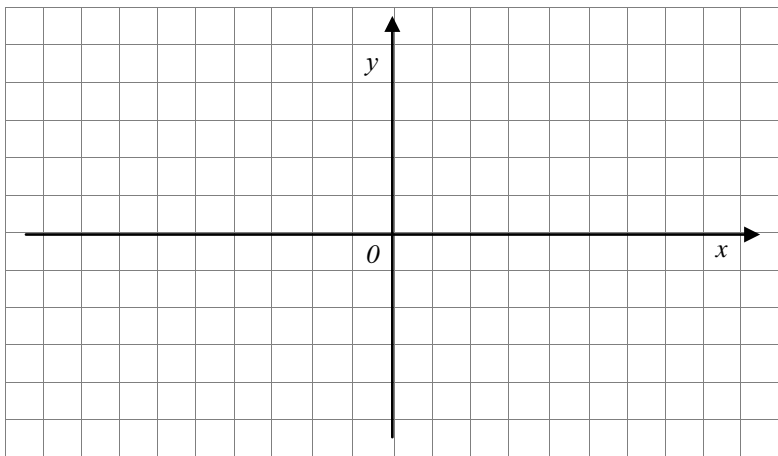
$\cos x = a;$ $x =$ _____;

$\sin x = a;$ $x =$ _____;

$\operatorname{tg} x = a;$ $x =$ _____;

$\operatorname{ctg} x = a;$ $x =$ _____.

4. Найдите количество решений уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ на интервале $[-3\pi; \frac{3\pi}{2}]$, решения отметьте на графике.



5. Заполните таблицу:

	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	общий вид
$\sin x = a$				
$\cos x = a$				
$\operatorname{tg} x = a$				
$\operatorname{ctg} x = a$				

6. Какие корни уравнений принадлежат интервалу $(-\pi; \pi)$?

- а) $\cos x = 0$; б) $\cos x = \frac{1}{2}$; в) $\cos x = -1$;
 г) $\sin x = \frac{1}{2}$; д) $\sin x = 1$; е) $\sin x = -1$.

7. Решите уравнения:

а) $2 \cos x = \frac{\sqrt{8}}{2}$

;

б) $\operatorname{tg}(\pi - x) + \sqrt{3} = 0$

;

в) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$

;

г) $2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{2} = 0$

.

8. Укажите наименьший положительный корень уравнения:

а) $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg}(-x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

;

$$\text{б) } \cos \pi \operatorname{ctg}(-x) = -\sqrt{3}$$

9. Укажите абсциссы точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox :

$$\text{а) } f(x) = \sin 6x - \frac{1}{2}$$

$$\text{б) } f(x) = \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{в) } f(x) = 4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} - \sqrt{2}$$

10. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций:

$$\text{а) } f(x) = 2 \operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x, \quad g(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$$

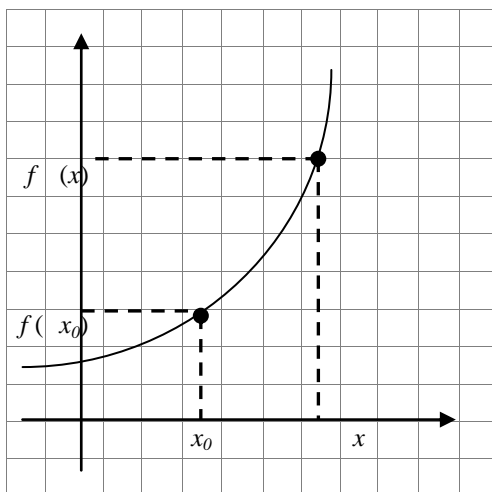
$$\text{б) } f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad g(x) = 1 - \operatorname{ctg}^2 x$$

$$\text{в) } f(x) = 2 \cos \frac{x}{2}, \quad g(x) = 1;$$

ТЕМА 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

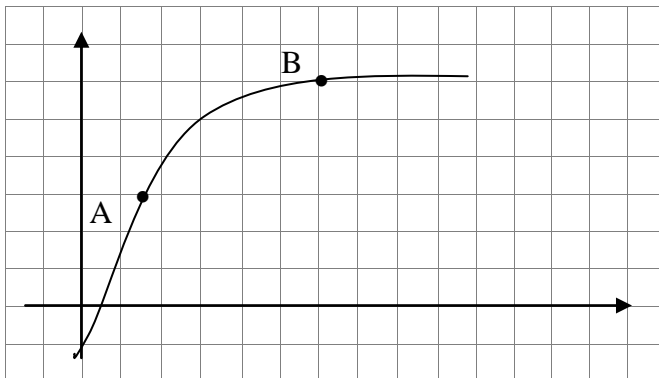
3.1. Приращение функции

- $x-x_0=$ _____;
 $f(x)-f(x_0)=$ _____;
 $x_0+\Delta x=$ _____;
 $f(x_0)+\Delta f=$ _____;
 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$ _____.



- Может ли Δx быть отрицательным числом? _____
Может ли Δf быть отрицательным числом? _____

3.



К графику функции через точки A и B провести секущую l .
Чему равен угловой коэффициент прямой $y = kx + b$?

Выразите угловой коэффициент секущей через Δf и Δx .

4. Геометрический смысл приращений заключается в том, что

5. Пусть материальная точка движется по прямой и известна ее координата $x(t)$. Тогда среднюю скорость ее движения за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ можно записать как $V_{cp} =$

6. Средней скоростью изменения функции на промежутке с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$ называют выражение $\frac{\Delta f}{\Delta x} =$ _____.

7. Найдите приращение функции:

а) $f(x)=2x-3$, если $x_0=1$, $\Delta x=0,2$,

$\Delta f=$ _____ ;

б) $f(x)=x^2+2$, если $x_0=-2$, $\Delta x=0,01$,

$\Delta f=$ _____ .

8. а) $f(x)=\sin^2 x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

$\Delta x=$ _____

$\Delta f=$ _____

б) $f(x)=x^2-x$, $x_0=2,5$, $x=2,6$

$\Delta x=$ _____

$\Delta f=$ _____

в) $f(x)=\operatorname{ctg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

$\Delta x=$ _____

$\Delta f=$ _____

9. Найдите $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если:

а) $y=ax^2+bx$

_____ ;

б) $y=ax^3$

_____ ;

в) $y=x+\frac{1}{x}$

_____ .

10. Для функции $y = \frac{1}{x}$ найдите Δy и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если:

а) $x_0=9$, $x=9,06$,

_____ ;

$$\text{б) } x_0=4,02, x=4,04,$$

;

$$\text{в) } x_0=5,06, x=5,03,$$

;

$$\text{г) } x_0=6, x=5,98,$$

.

3.2. Понятие производной

1. Производной функции f в точке x_0 называется

2. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$ _____.

3. Запишите общую схему вычисления производной:

- 1) _____ ;
2) _____ ;
3) _____ .

4. По общей схеме вычислите производные следующих функций:

а) $f(x) = 2x^2 + 3x$

б) $f(x) = x^3 + x$

в) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$\Gamma) f(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\Delta) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

5. Что значит продифференцировать функцию?

6. Заполните таблицу:

$f(x)$	$(kx+b)$			\sqrt{x}	$\frac{1}{x}$	$c=\text{const}$	
$f'(x)$		$2x$	k				$3x^2$

7. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0 .

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2}{4} - x, x_0=2$$

б) $f(x) = \frac{2}{x} + 1, x_0 = -1$

8. Пользуясь определением, найдите $f'(x)$ в каждой точке $D(f)$.

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$

б) $f(x) = \frac{3}{x^2} - 7$

9. Операция вычисления производной называется

10. Найдите точки, в которых производная функции $y=x^2$:

а) равна нулю _____

б) больше нуля _____

в) меньше нуля _____

3.3. Правила дифференцирования

1. Запишите общую схему вычисления производной:

- 1) _____;
- 2) _____;
- 3) _____.

2. Используя общую схему вычисления производной, докажите, что $(u+v)'=u'+v'$.

1) $\Delta(u+v) =$ _____;

2) $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} =$ _____;

3) при $\Delta x \rightarrow 0$ $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} \rightarrow$ _____.

3. Выпишите формулы дифференцирования:

$(u \pm v)' =$ _____;

$(u \cdot v)' =$ _____;

$\left(\frac{u}{v}\right)' =$ _____;

$(x^n)' =$ _____.

4. Используя правила дифференцирования, вычислите производные функции:

а) $f(x) = x^7 + 2x^5 + \frac{4}{x^2} - 1$ _____

_____;

б) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (3x^3 - 16x)$ _____

_____;

в) $f(x) = \frac{4-x^2}{3+2x}$ _____

_____.

5. Найдите производную функции:

а) $f(x)=100x^{10}-10x^{100}$ в точке x и 1 _____
_____;

б) $f(x)=10x^9-9x^{10}$ в точке x и -1 _____
_____;

в) $f(x)=(x+1) \cdot \sqrt{x}$ в точке 2 ; 4 ; x ; $x-2$ _____

_____.

6. Найдите значение $f'(x)=0$, если

а) $f(x) = \frac{3}{5-4x}$ _____
_____;

б) $f(x) = \frac{x^3}{6} - 0,5x^2 - 3x + 2$ _____
_____;

в) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ _____
_____.

7. а) $f(x) = (2x - 3)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) + f(1)$

б) $f(x) = (3x + 4)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) - f(1)$

8. Решите уравнение $f'(x)=0$, если

а) $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$

;

б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$

;

в) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

;

9. Составьте и решите уравнения:

а) $f'(x) = f'(-2)$, если $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+4}$

;

б) $f'(x) = f(x) - 2x$, если $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

;

10. Решите неравенство $g'(x)<0$, если $g(x)=(x-3)(x+2)^2$

;

3.4. Производная сложной функции

1. Вычислите $f(1)$, если:

а) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$:

1) $3x+1 =$ _____;

2) $\sqrt{3x + 1} =$ _____;

б) $f(x) = (2x+2)^3$:

1) $2x+2 =$ _____;

2) $(2x+2)^3 =$ _____;

в) $f(x) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$:

1) $x - \frac{3\pi}{4} =$ _____;

2) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) =$ _____.

2. Сложная функция записывается в виде $h(x) =$ _____,
где $f(x) =$ _____.

3. Область определения сложной функции $f(g(x))$ – это множество _____

_____.

4. Производная сложной функции вычисляется по формуле
 $h'(x) =$ _____.

5. Задайте с помощью формул функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:

а) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ и $g(x) = \sqrt{x}$;

_____;

б) $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2x$;

в) $f(x) = x^3$ и $g(x) = \operatorname{tg} x$;

6. Найдите $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = (4x+3)^6$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = (2-3x)^5$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$, $x_0 = 3$;

г) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$, $x_0 = -2$;

д) $f(x) = (3x - 5)^3 + \frac{1}{(3-x)^2}$, $x_0 = 2$;

$$\text{е) } f(x) = \frac{1}{(2x+7)^4} - (1-x)^3, x_0 = -3;$$

$$\text{ж) } f(x) = \sqrt{5-4x-x^2}, x_0 = -2;$$

$$\text{з) } f(x) = \sqrt{x^2-8x+12}, x_0 = 4;$$

7. Решите уравнение $f'(x)=0$, если:

$$\text{а) } f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2;$$

$$\text{б) } f(x) = (x^2 - 2x - 3)^2;$$

$$\text{в) } f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}};$$

$$\text{г) } f(x) = \sqrt{x^3 + \frac{243}{x}};$$

8. Докажите тождества:

а) $f(x) = \frac{1}{x-2} f'(3) \cdot f(x)$, если $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$;

б) $f(x) = \frac{1}{x+1} f'(0) \cdot f(x)$, если $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$;

9. Докажите, что при всех допустимых значениях x верно равенство:

а) для $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$$(f(f(x)))' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$(f(f(x))) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(f(f(x)))' = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(f(x))^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

б) для $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$$(f(f(x)))' = \frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$(f(f(x))) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(f(f(x)))' = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(f(x))^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

10. Решите уравнение $(f(g(x)))' = 0$ и $(g(f(x)))' = 0$, если:

а) $f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = \frac{1}{x}$

$\underline{\hspace{10cm}}$
 $\underline{\hspace{10cm}}$
 $\underline{\hspace{10cm}}$;

б) $f(x) = x^2 - 4x$ и $g(x) = \sqrt{x}$

$\underline{\hspace{10cm}}$
 $\underline{\hspace{10cm}}$
 $\underline{\hspace{10cm}}$.

3.5. Производные тригонометрических функций

1. Заполните таблицу:

$f(x)$	$\cos x$		$3 \operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$				$-\operatorname{ctg} x$	
$f'(x)$		$\cos x$			$5 \cos x$	$-\frac{3}{\cos^2 x}$	$\sin x$		$-\frac{6}{\sin^2 x}$

2. Вычислите производные следующих функций:

а) $f(x) = \cos x - \sin x$; $f'(x) =$

_____;

б) $f(x) = 3 \operatorname{tg} x - 3x$; $f'(x) =$

_____;

в) $f(x) = 5 - \operatorname{ctg} x$; $f'(x) =$

_____;

г) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; $f'(x) =$

_____;

_____;

д) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$; $f'(x) =$

_____;

_____.

3. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin(3x - 9)$; $f'(x) =$

_____;

$$\text{б) } f(x) = \sin\left(1 - \frac{x}{2}\right); f'(x) =$$

$$\text{в) } f(x) = \cos(9x - 10); f'(x) =$$

$$\text{г) } f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right); f'(x) =$$

$$\text{д) } f(x) = \operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right); f'(x) =$$

$$\text{е) } f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right); f'(x) =$$

$$\text{ж) } f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right); f'(x) =$$

$$\text{з) } f(x) = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{x}{4}\right); f'(x) =$$

4. Составьте и решите уравнение:

$$\text{а) } f'(x) = g'(x), \text{ если } f(x) = \sin^2 x, g(x) = \cos x + \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\text{б) } f'(x) = g'(x), \text{ если } f(x) = \cos^2 x, g(x) = \sin x - \sin \frac{\pi}{10}$$

5. Найдите $f'(x_0)$, если

а) $f(x) = (x^2 - 3x - 4)^5 - \sin \pi x$; $x_0 = 1$

_____ ;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^{\frac{\pi}{5}} x}$; $x_0 = -3\pi$

_____ ;

в) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$

_____ .

6. Найдите значение аргумента, удовлетворяющее условию $f'(x) = g'(x)$, если

а) $f(x) = \sin(2x - 3)$; $g(x) = \cos(2x - 3)$

_____ ;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; $g(x) = 2x + 15$

_____ .

7. Дано: $f(x) = a\sin 2x + b\cos x$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -4$.

Чему равны a и b ? $f'(x) =$ _____

8. Докажите, что при всех допустимых значениях x верно равенство:

а) для $f(x) = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ и $g(x) = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$

$f'(x)g'(x) = -f(x) \cdot g(x)$

б) для $f(x) = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$ и $g(x) = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

$\frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{g'(x)} = 1$

9. С помощью стрелок составьте верное соотношение:

$\arcsin'x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos'x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arctg'x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arcctg}'x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. Вычислите производные функций:

a) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; f'(x) =$ _____

_____ ;

б) $f(x) = x \cdot \operatorname{arcsin} \frac{x}{2}; f'(x) =$ _____

_____ ;

в) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \operatorname{arcctg} x; f'(x) =$ _____

_____ ;

г) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arccos} \sqrt{x}; f'(x) =$ _____

_____ .

3.6. Применение производных к исследованию функции

1. Критической точкой функции называется

2. Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2$

б) $f(x) = 2\sin x - x$

в) $f(x) = 12x - x^3$

г) $f(x) = x + \sqrt{2}\cos x$

д) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7$

$$е) f(x) = \sin \frac{x}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

$$ж) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

$$з) f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x}$$

3. Сформулируйте признаки монотонности функции.

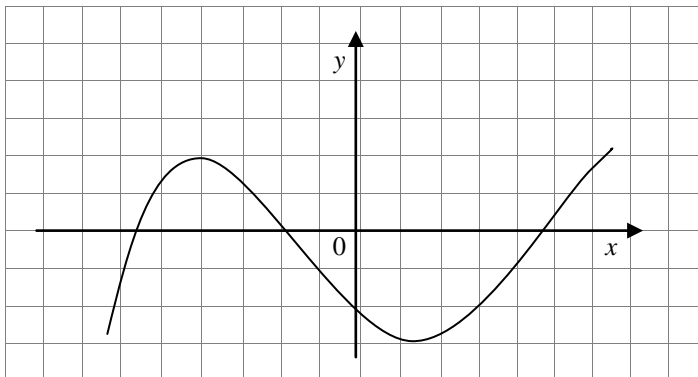
4. Сформулируйте теорему Дарбу.

5. Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является:

а) возрастающей, если $g(x) = 2x^5 + 4x^3 + 3x$

б) убывающей, если $g(x) = 5 - 2x - x^3 - 4x^7$

6. На рисунке изображен график производной некоторой функции. Определите промежутки возрастания и убывания данной функции.



7. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

б) $f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$

в) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$

$$\Gamma) f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$$

$$\Delta) f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$$

$$\text{e)} f(x) = \sqrt{4x - x^2}$$

8. Сформулируйте теорему Ферма.

9. Точка x_0 называется точкой максимума функции

10. Точка x_0 называется точкой минимума функции

11. Определите точки экстремума функции:

a) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$

б) $f(x) = 35x^7 - x^5 + 1$

в) $f(x) = (x + 1)^2(x + 5)^2$

г) $f(x) = (x + 3)^2(x - 5)^2$

д) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

е) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

$$\text{ж) } f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{з) } f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$$

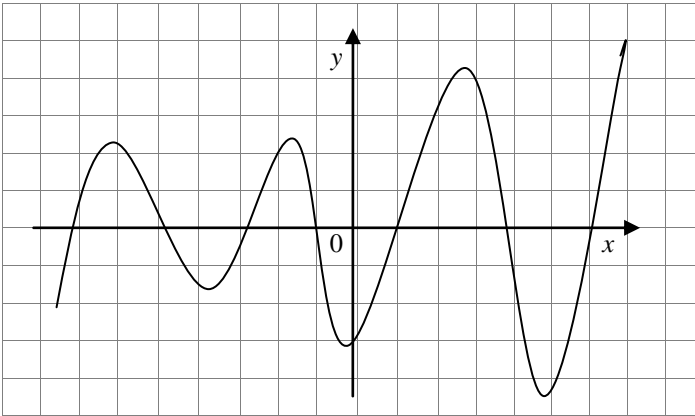
$$\text{и) } f(x) = \sin^2 x - \cos x$$

$$\text{к) } f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

12. Запишите алгоритм исследования функции на экстремумы.

13. При каком значении m функция $f(x) = x^2\sqrt{m-x}$ имеет экстремум в точках $x=0$ и $x=6$?

14. На рисунке изображен график производной некоторой функции, определенном на промежутке (a,b) .



Определите:

а) промежутки возрастания и убывания функции:

$f(x)$ ↗ при x _____

$f(x)$ ↘ при x _____

б) точки минимума функции _____

в) точки максимума функции _____

г) количество промежутков убывания функции _____

д) количество интервалов возрастания функции _____

15. На отрезке $[-3; 4]$ постройте график непрерывной функции $y=f(x)$, пользуясь данными таблицы, учитывая, что $f(0)=-2$.

а)

x	-4	$(-4; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 3)$	3
$f'(x)$			0	+	0		
$f(x)$	5	↘	1	↗	4	↘	0

6)

x	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; 4)$	4
$f'(x)$		+	0		0	+	
$f(x)$	-5	↗	1	↘	4	↗	2

ТЕМА 4. ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. Определение первообразной. Основное свойство первообразной. Правила вычисления первообразной

1. Задайте формулой хотя бы одну функцию f , если:

а) $f'(x) = 3 - \frac{3}{\sin^2 x}$; $f(x) =$ _____;

б) $f'(x) = 2x - 2\sqrt{x}$; $f(x) =$ _____;

в) $f'(x) = 4x - \frac{5}{3x^2}$; $f(x) =$ _____;

г) $f'(x) = \frac{7}{\cos^2 x} - 3\sin x$; $f(x) =$ _____;

д) $f'(x) = 5 + \frac{1}{5}\cos x$; $f(x) =$ _____.

2. Запишите определение первообразной.

3. Докажите, что функция $y=F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$, если:

а) $F(x)=x^{11}$; $f(x)=11x^{10}$

б) $F(x)=x^7+x^9$; $f(x)=7x^6+9x^8$

в) $F(x)=3\sin x$; $f(x)=3\cos x$

$$\Gamma) F(x)=x^2-\cos x; f(x)=2x+\sin x$$

$$\Delta) F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$\text{e)} F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}; f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$$

4. Сформулируйте основное свойство первообразной.

5. Найдите общий вид первообразной для функций:

а) $f(x)=\cos x$

б) $f(x)=\sin x$

в) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

г) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

д) $f(x) = \frac{x^7-x^5}{x^5}$

6. Запишите правила вычисления первообразных.

7. Для функции f найдите первообразную F , принимающую заданное значение в указанной точке

а) $f(x) = (x - 8)^3; F(8)=1$

б) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}; F(9)=9$

в) $f(x) = (x + 4)^2; F(-4)=3$

г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; F(4)=4$

$$д) f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2; F(-1)=0$$

$$е) f(x) = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x - 2\cos\frac{x}{2}; F(2\pi) = 2\pi$$

$$ж) f(x) = \frac{2}{\sqrt{5-2x}} + 4x; F(2)=6$$

$$з) f(x) = 6x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2-\frac{x}{8}}}; F(3)=55$$

$$и) f(x) = \frac{6}{(4-3x)^2}; F(1,5)=1$$

$$к) f(x) = \frac{4}{(3-0,5x)^2}; F(-2)=5$$

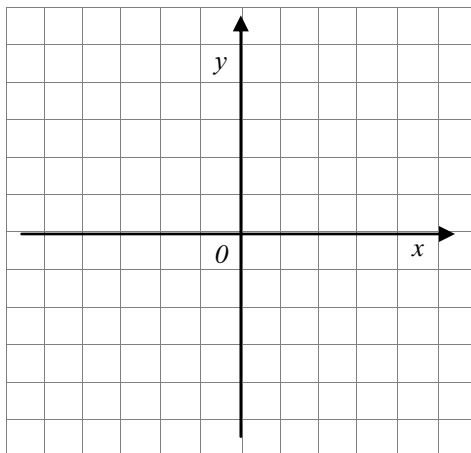
8. Дано:

а) $f(x) = 6x^2 - 3x - 2,5$; $F(-1) = 3$, найдите $F(-2)$

б) $f(x) = 3x^2 - \frac{x}{2} - 5$; $F(-2) = 5$, найдите $F(-1)$

9. Дана функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$.

Постройте график функции $y=F(x)$, если $F(-3)=0$.



10. Дано:

а) $f(x) = \cos x$, $F(x) + C$ – ее первообразная,
 $g(x) = F(x) + C - f'(x)$ и $g(0) = 2$.

Решите уравнение $g(x) = 0$.

б) $f(x) = \sin x$; $F(x) + C$ – ее первообразная,
 $g(x) = F(x) + C - f'(x)$ и $g(0) = 0$.
Решите уравнение $g(x) = 0$.

11. Для данной функции найти первообразную, график которой проходит через данную точку:

а) $y = \sin x$; $M\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{4}\right)$

б) $y = \cos x$; $M\left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$

в) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; $M\left(\frac{\pi}{4}; -1\right)$

г) $y = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}}$; $M\left(\frac{3\pi}{4}; 0\right)$

12. Найдите множество всех первообразных для функций:

а) $f(x) = \frac{4}{x^3} - (1 - 2x)^3$; $F(x) =$ _____
_____;

б) $f(x) = x + \frac{2}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 1$; $F(x) =$ _____
_____;

в) $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{6})$; $F(x) =$ _____
_____;

г) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3})$; $F(x) =$ _____
_____;

д) $f(x) = \frac{7}{2\sqrt{3 - \frac{x}{2}}} + \frac{1}{(x - 2x)^5}$; $F(x) =$ _____
_____;

е) $f(x) = 8\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}$; $F(x) =$ _____
_____;

ж) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{8} - \sin^2 \frac{x}{8}$; $F(x) =$ _____
_____;

з) $f(x) = \frac{10}{(10x+2)^4} - \frac{3}{\sin^2(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4})}$; $F(x) =$ _____
_____;

и) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{5-12x}} + \cos 3x$; $F(x) =$ _____
_____;

к) $f(x) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + \sqrt{2x - 13}$; $F(x) =$ _____

13. Множество всех преобразований для функции $f(x)$ называется _____
и обозначается _____

14. В записи $\int f(x) dx$ $f(x)$ – _____;
 $f(x) dx$ – _____;
 dx – _____.

15. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int 4 \sin x dx$ _____;

б) $\int -\frac{9}{\cos^2 x} dx$ _____;

в) $\int 6 \cos x dx$ _____;

г) $\int -\frac{16}{\sin^2 x} dx$ _____;

д) $\int \frac{3}{2\sqrt{x}} dx$ _____;

е) $\int -\frac{15}{x^2} dx$ _____;

ж) $\int (x^2 + \sin x) dx$ _____;

з) $\int \left(-\frac{1}{x^2} + x^5\right) dx$ _____;

и) $\int (2 - 9x)^6 dx$ _____;

к) $\int \frac{2}{(2x+5)^3} dx$ _____.

4.2. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл

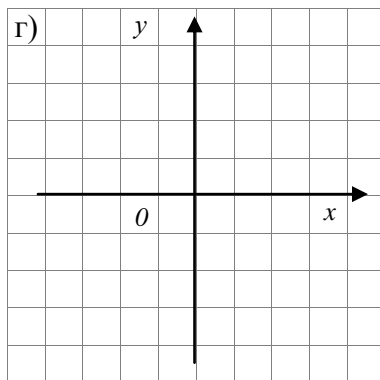
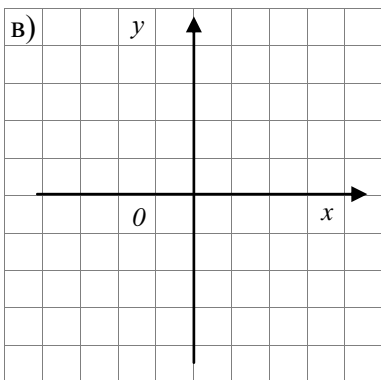
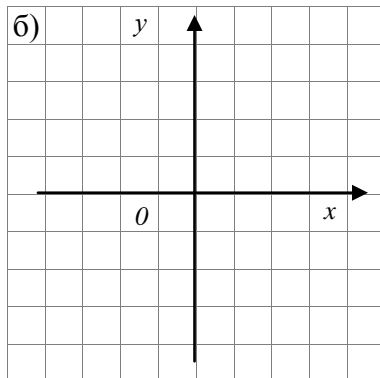
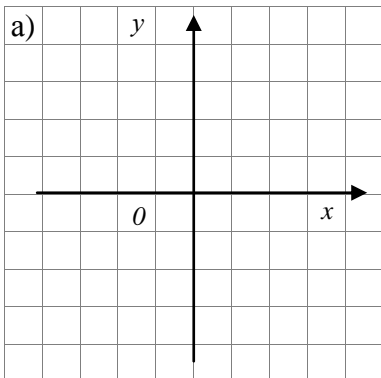
1. Изобразите фигуры, ограниченные линиями

а) $f(x) = -\frac{1}{x}$; $x = -1$; $x = -2$; $y = 0$;

б) $f(x) = 2\cos x$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$; $y = 0$;

в) $f(x) = 4 - x^2$; $y = 0$;

г) $f(x) = x^3$; $x = 2$; $x = -2$; $y = 0$.

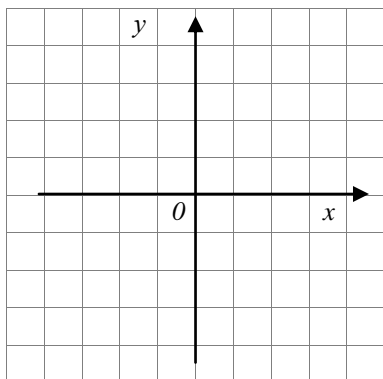


2. Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную _____
_____.

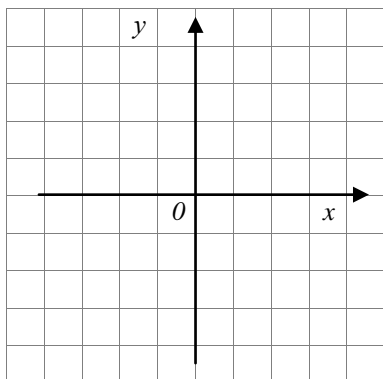
3. Какие линии необходимы для существования криволинейной трапеции?

4. Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле: _____,
где $F(a)$ – _____;
 $F(b)$ – _____.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; $y=0$



б) $f(x) = x^2 + 4x + 10 = 0; x = 0; y = 0; x = -3$



6. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.

7. Вычислите:

а) $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x + 9) dx$ _____

;

б) $\int_{-3}^1 (x^2 + 4x + 4) dx$ _____

;

в) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1-6x)^2} dx$ _____

;

г) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^2} dx$ _____

;

д) $\int_{\frac{5}{8}\pi}^{\frac{3\pi}{8}} \cos 0,5x dx$ _____

_____;

е) $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{3} dx$ _____

_____;

ж) $\int_{-1}^0 \sqrt{4+3x} dx$ _____

_____;

з) $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$ _____

_____.

8. При каком значении a и b выполняется равенство:

а) $\int_a^{\frac{a}{2}} \frac{1-2x}{3} dx = -\frac{4}{3}$

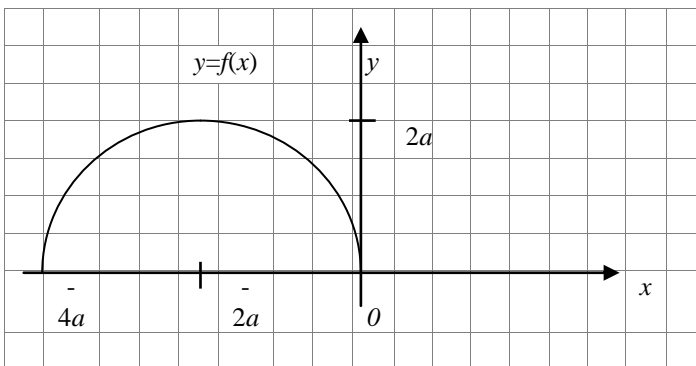
_____;

б) $\int_{\frac{b}{2}}^b \frac{1+2x}{4} dx = 2,5$

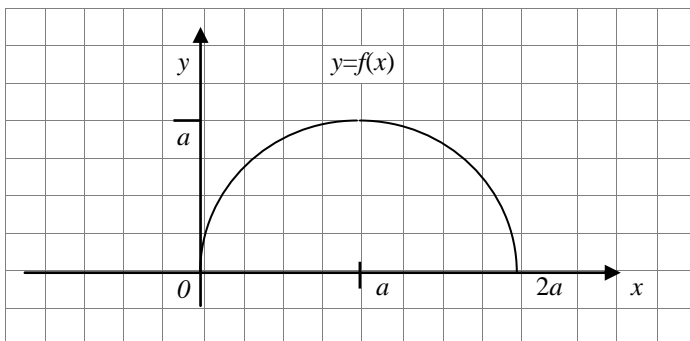
_____.

9. Найдите:

a) $\int_{-4a}^0 f(x) dx$



б) $\int_0^{2a} f(x) dx$

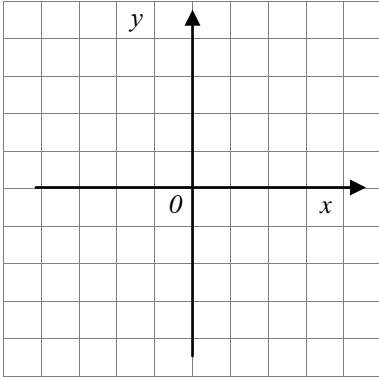


10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

a) $f(x) = \sin x$;

$f(x) = \cos x$;

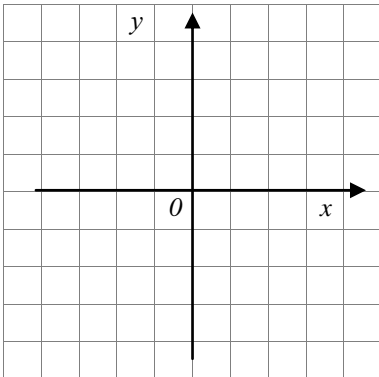
$x = \frac{\pi}{4}$; $x = \pi$



б) $f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

$-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$



ТЕМА 5. СТЕПЕНИ И КОРНИ

5.1. Корень n-степени. Степень с действительным показателем

1. Запишите свойства степени с действительным показателем и корня n-степени.

а) $a^m \cdot a^n =$ _____

а) $\sqrt[n]{ab} =$ _____

б) $\frac{a^m}{a^n} =$ _____

б) $\sqrt[n]{a^k} =$ _____

в) $(a^m)^n =$ _____

в) $\sqrt[nk]{a^k} =$ _____

г) $a^{-m} =$ _____

г) $(\sqrt[n]{a})^k =$ _____

д) $(ab)^m =$ _____

д) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} =$ _____

е) $\left(\frac{a}{b}\right)^m =$ _____

е) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} =$ _____

2. Сформулируйте определение корня n-степени, арифметического корня n-степени.

3. Сформулируйте определение степени с рациональным показателем.

4. Используя калькулятор, с точностью до сотых вычислите $5^{\sqrt{2}}$.

5. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[4]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{0,5}}$;

б) $\frac{\sqrt[4]{6-3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{6+3\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$;

в) $9^{1,5} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} + \left(\frac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot (1,2)^{4,5}$;

г) $4^{2,5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot (0,8)^{\frac{7}{5}}$;

д) $\left(4 \cdot \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{0,125}\right)^{-1}\right)^{-1}$;

$$е) \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \cdot 81^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^{-4}}{225};$$

$$ж) \frac{(10^{1/3} - 7^{1/3})(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{70} + \sqrt[3]{49})}{(\sqrt[3]{16} - 3\sqrt{6})^2 \left(\frac{\sqrt{16}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2};$$

$$з) \frac{(8^{1/2} + \sqrt{2})^2 (4^{1/3} - \sqrt[3]{2})}{32^{1/3} - \sqrt[3]{16}};$$

6. Даны положительные числа a и b , функция $f(x)$. Сравните $f(a)$ и $f(b)$, если:

а) $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{x}}, a > b$

б) $f(x) = \frac{x^{\sqrt{3}}}{x}, a < b$

в) $f(x) = x^a, a > b, 0 < a < 1$

г) $f(x) = x^a, a < b, a < 0$

7. Упростите выражение и вычислите его при заданном значении параметра:

а) $\left(\left(\frac{5\sqrt{b^8}}{b(\sqrt[3]{b^5})} \right)^{-3/2} + \left(\frac{b^8\sqrt{125}}{\sqrt{b}} \right)^{-2} \right) : (\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{5})$ при $b = \frac{1}{12}$;

б) $\left(\frac{(\sqrt{3})^{-8}}{4(\sqrt[3]{3a})^{-9}} - (\sqrt{3a})^{-2} \right) : \left(\frac{(a+\sqrt{2})^2}{12a(a-\sqrt{2})^{-2}} \right)$ при $a = \sqrt{7}$;

8. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $0,3^\pi; 0,3^{0,5}; 0,3^{\frac{2}{3}}; 0,3^{3,1415}$

б) $\sqrt{2}^\pi; 1,9^\pi; \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\pi; \pi^\pi$

в) 5^{-2} ; $5^{-0,7}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

г) $0,5^{-\frac{2}{3}}$; $1,3^{-\frac{2}{3}}$; $\pi^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt{2^{-\frac{2}{3}}}$

д) $\sqrt{3^{\sqrt[3]{4}}}$; $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$; $\sqrt[6]{100}$

е) $\sqrt[5]{3\sqrt{4}}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2^{\sqrt[5]{2}}}$

ж) $\sqrt[5]{4}$; $\sqrt[6]{3^{\sqrt[5]{3}}}$; $\sqrt[10]{25}$

з) $\sqrt[16]{64}$; $\sqrt[48]{7\sqrt{7}}$; $\sqrt[4]{2\sqrt{1,25}}$

9. Дано:

а) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$; $g(x) = x^{-2}$, докажите, что $f(16x^8) = 2(g(x))^{-1}$

б) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; $g(x) = x^{-3}$, докажите, что $f(27x^3) = 9(g(x))^{-2}$

10. Решите уравнение $g'(x) = 0$, если:

а) $g(x) = 2\sqrt{x} - x$

б) $g(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} + 2x$

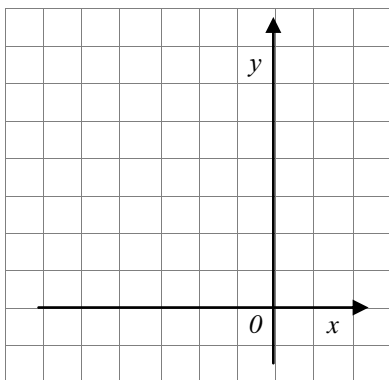
в) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x$

г) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - 2x$

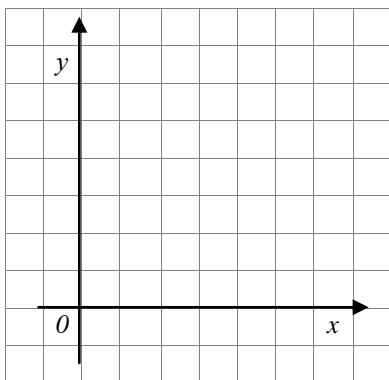
5.2. Показательная функция, ее свойства и график

1. В одной и той же системе координат постройте графики функции. Сделайте вывод о том, как меняется график в зависимости от основания степени.

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



б) $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = 4^x$



2. Функция, заданная формулой $y = a^x$, _____

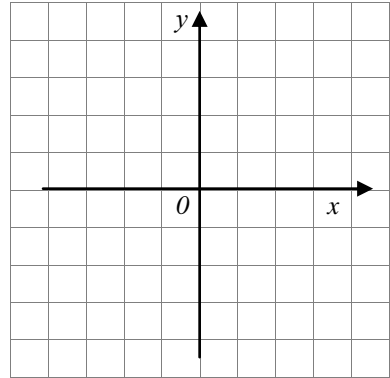
3. Постройте график показательной функции при $a > 0$ и $0 < a < 1$. Перечислите свойства показательной функции:

а) $D(f) =$ _____

б) $E(f) =$ _____

в) _____

г) _____



4. Найдите значение показательной функции $y = a^x$ при заданных значениях x :

а) $y = -7^x; x_1 = 3; x_2 = -1; x_3 = \frac{1}{2}$

_____ ;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = 1; x_3 = -\frac{1}{2}$

_____ ;

в) $y = (\sqrt{3})^x; x_1 = 0; x_2 = 4; x_3 = 5$

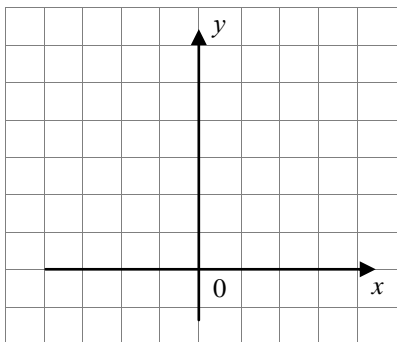
_____ ;

г) $y = \left(\frac{4}{9}\right)^x; x_1 = -\frac{3}{2}; x_2 = -1; x_3 = 2,5$

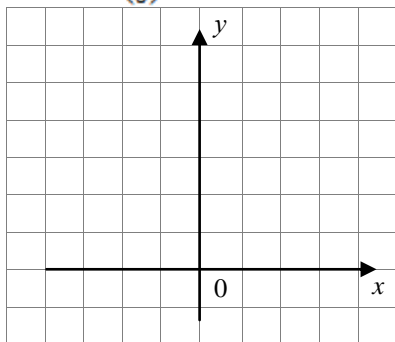
_____ .

5. Постройте графики функции:

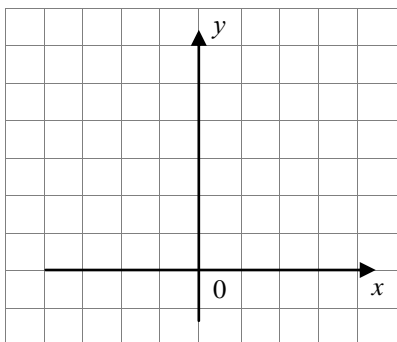
а) $y = 2^x + 1$;



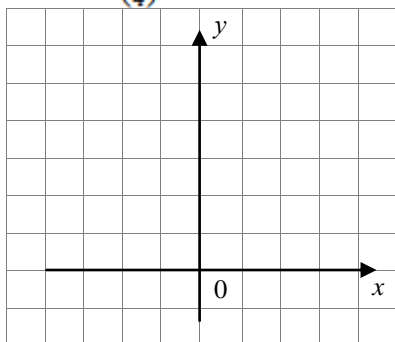
б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$;



в) $y = 5^{x-1}$;



г) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$.



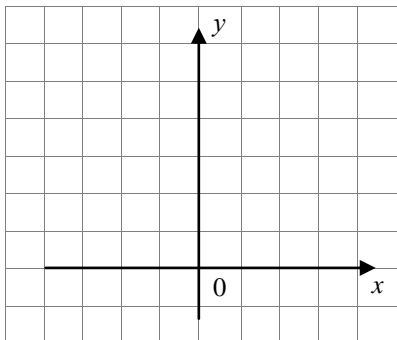
6. Найдите значение аргумента x , при котором функция $y=f(x)$ принимает заданное значение.

а) $y = 2^x$; $y = 16$; $y = 8\sqrt{2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{32\sqrt{2}}$

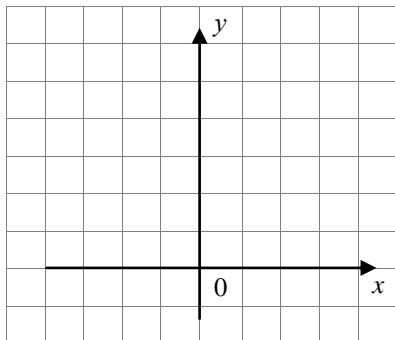
б) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $y = \frac{1}{25}$; $y = 125$; $y = \frac{1}{25\sqrt{2}}$; $y = 625 \cdot \sqrt{5}$

7. При каких значениях аргумента график заданной показательной функции лежит выше графика заданной линейной функции:

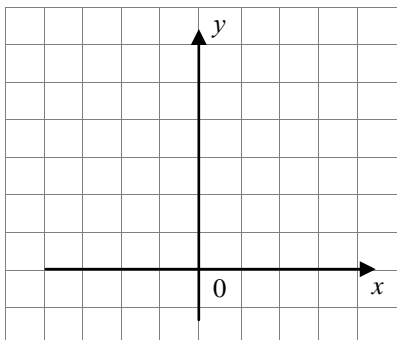
а) $y = 3^x$; $y = -x + 1$;



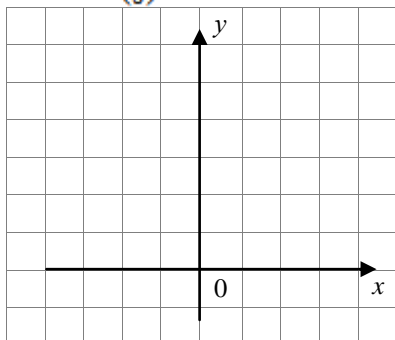
б) $y = 0,5^x$; $y = 2x + 1$;



в) $y = 0,5^x$; $y = 2x + 1$;

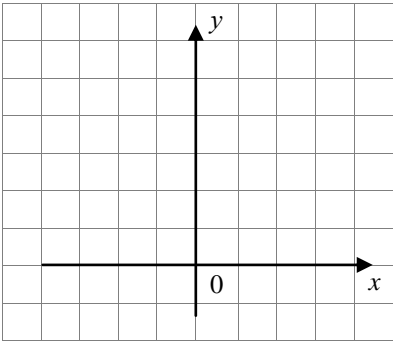


г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = x + 1$.

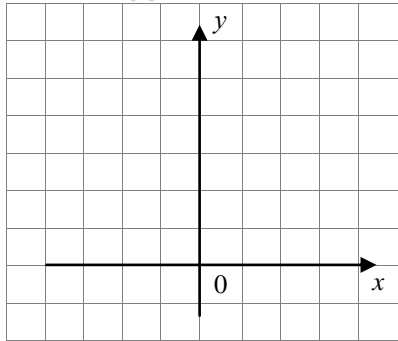


8. При каких значениях x график заданной показательной функции лежит ниже графика заданной линейной функции:

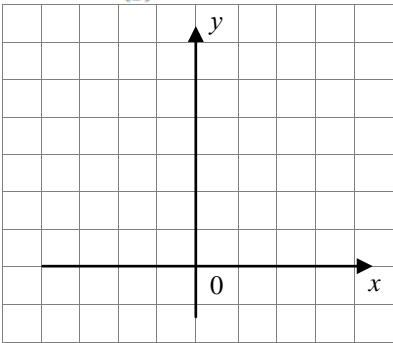
а) $y = 2^x$; $y = -\frac{3}{2}x - 1$;



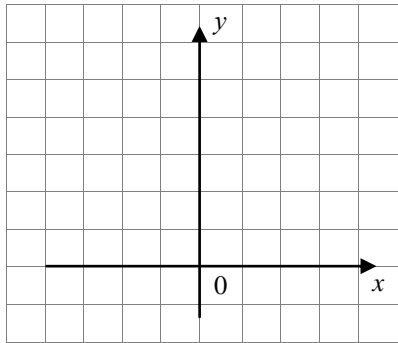
б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = -x - 2$;



в) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $y = 3x + 1$;



г) $y = 3^x$; $y = -2x + 5$.



9. Найдите область определения функции:

а) $y = 4^{x^2-1}$

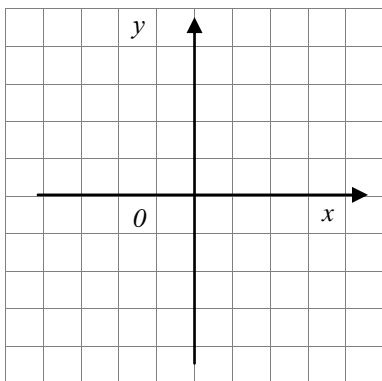
б) $y = \frac{1}{2^x-1}$

в) $y = \frac{2x+1}{\left(\frac{1}{8}\right)^x - 27}$

10. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{если } x < 0; \\ \sqrt{x} + 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Постройте график функции, вычислите $f(-5)$; $f(-2,5)$; $f(0)$; $f(4)$; $f(1,69)$.



5.3. Решение показательных уравнений

1. Простейшим показательным уравнением называют уравнения вида _____.

2. Докажите, что для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2^x$ выполняется равенство:

а) $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

_____;
_____;

б) $f(x + 1) \cdot f(2x) = 2f^3(x)$

_____;
_____;

в) $f(-2x) = \frac{1}{f^2(x)}$

_____;
_____;

г) $f(\cos^2 x) = \sqrt{2f(\cos 2x)}$

_____;
_____.

3. Решите уравнения. Какие из уравнений являются показательными?

а) $3x^2 = 27$

_____;

б) $\frac{4}{x^2} = 1$

_____;

$$в) 2^{x+1} = 16$$

$$г) \sqrt{4^{x+1}} = \sqrt{4}$$

$$д) 5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

$$е) (x + 1)^3 = 27$$

4. Решите уравнения:

$$а) \left(\frac{49}{16}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^9$$

$$б) \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{25}{9}\right)^{-3}$$

$$в) 2^{x-1} = 2\sqrt{2}$$

$$г) 3^{2x+5} = \frac{1}{3}$$

$$д) \sqrt[5]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$$

$$е) \sqrt{10^{2x+6}} = \frac{10}{\sqrt[4]{10}}$$

$$ж) 2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 7 \cdot 2^{-3}$$

$$з) 5^{x+2} - 12 \cdot 5^{x-1} = 565$$

$$и) \left(\frac{28}{5}\right)^{28x^2-5} = \left(\frac{5}{28}\right)^{5x^2-127}$$

$$к) \left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$$

5. Найдите сумму и произведение абсцисс общих точек графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

$$а) f(x) = 0,8^{x^2+\frac{1}{2}}, g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{8}{2}x}$$

$$\text{б) } f(x) = 0,9^{x^2+1}, g(x) = \left(\frac{10}{9}\right)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\text{в) } f(x) = 1,4^{x^2+1}, g(x) = \left(\frac{10}{14}\right)^{-\frac{7}{8}}$$

6. При каких значениях x функции $f(x)$ не больше и не меньше числа b , если:

$$\text{а) } f(x) = 3^{7x+2}, b = \frac{1}{243}$$

$$\text{б) } f(x) = 1,1^{5x+3}, b = \frac{100}{121}$$

$$\text{в) } f(x) = 2,75^{8x+2}, b = \frac{16}{121}$$

7. Найдите значение x , при котором $f(x) = 0$, если:

$$\text{а) } f(x) = 3^{x+9} \cdot 5^{4x} - 15^{2x+6}$$

$$\text{б) } f(x) = 2^{x+1} \cdot 3^{4x} - 9 \cdot 6^{2x}$$

$$\text{в) } f(x) = 10^{2x} + 9 \cdot 20^x - 10 \cdot 2^{2x}$$

8. Найдите корень уравнения x_0 , удовлетворяющий условию:

$$\text{а) } 10 \cdot 3^{\sqrt{3x^2-2x}} - 3 = 3 \cdot 9^{\sqrt{3x^2-2x}}, 3x_0 + 1 > 0$$

$$\text{б) } 17 \cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}} - 8 = 2 \cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}, 2x_0 + 10 \leq 8$$

9. Найдите ординату общей точки графиков функций $y = 2^{3x-1} \cdot 3^{x-3}$ и $y = 4^{x+1}$.

10. Найдите наибольшее значение выражения $2x_0 + 2$, если x_0 – корень уравнения.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{2x+1} - 13 \left(\frac{1}{13}\right)^{2x+2} = 13$$

5.4. Логарифмы, их свойства

1. Дайте определение логарифма.

2. Используя простейшее показательное уравнение $a^x = b$ ($a \neq 1; a > 0$) и определение логарифма по основанию a , записать основное логарифмическое тождество.

3. При помощи стрелок составьте верное соответствие при условии, что $a > 0; a \neq 0; b > 0; x > 0; y > 0$.

$\log_a a$	0
$\log_a (x \cdot y)$	$\log_a b$
$\log_a \left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{1}{p} \log_a b$
$\log_a (x^k)$	$\log_a x + \log_a y$
$\log_a k b^k$	$\log_a x - \log_a y$
$\log_a b$	$\frac{1}{\log_b a}$
$\log_a 1$	$k \log_a x$
$\log_a p x$	1

4. Десятичным логарифмом называется _____

5. Вычислите:

- а) $\log_{25} 125 =$ _____; б) $\log_{27} 729 =$ _____;
в) $\log_{\frac{1}{9}} 3 =$ _____; г) $\log_4 \frac{1}{32} =$ _____;
д) $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6} =$ _____; е) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4} =$ _____;
ж) $\log_3^2 9 =$ _____; з) $\log_{\frac{1}{82}}^2 4 =$ _____;
и) $\log_{0,5}^2 4 =$ _____; к) $\sqrt{\log_3 81} =$ _____.

6. Найдите значение числового выражения

- а) $3^{\log_3 8} =$ _____;
б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 7} =$ _____;
в) $12^{\log_{12} 1,3} =$ _____;
г) $2^{3+\log_2 9} =$ _____;
д) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2+\log_{\frac{1}{6}} 20} =$ _____;
е) $(\sqrt{7})^{4+\log_{\sqrt{7}} 0,5} =$ _____;
ж) $6^{\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}} =$ _____;
з) $2^{\log_4 9} =$ _____;
и) $4^{\log_2 \sqrt{7}} =$ _____;
к) $7^{\log_{\sqrt{7}} 4} =$ _____.

7. Вычислите:

а) $\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{\frac{1}{5}} 625 =$

_____;
_____;

б) $\log_{0,1} 0,005 - \log_{0,1} 0,05 =$

_____;
_____;

$$\text{B) } \log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_3 9 : \log_7 \frac{1}{7} =$$

$$\text{Г) } 17^{\frac{1}{2} \log_{17} 3} + \sqrt{17} =$$

$$\text{Д) } \log_{45} 5 + \frac{1}{\log_9 45} =$$

$$\text{e) } \sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 54 - \log_{\sqrt{3}} 18\sqrt{3} =$$

$$\text{ж) } \log_{\frac{1}{8}} \log_3 27 =$$

$$\text{з) } (\log_{37} 5 + \log_{37} 7,4 - 4\log_2 5) : \log_{\frac{1}{8}} 81 =$$

$$\text{и) } (\log_5 6 - \log_5 12 + \log_5 - 24) \cdot \log_{12} 25 =$$

$$\text{к) } \log_2(\sqrt{3} + 2) - 2\log_2(\sqrt{3} + 1) =$$

8. Прологарифмируйте выражение:

а) $125\sqrt{5a} \cdot b : \sqrt[5]{c^2}$ по основанию 5

_____ ;
_____ ;

б) $64\sqrt[5]{4a^2} : b^{-\frac{5}{7}}$ по основанию 4

_____ ;
_____ ;

в) $\left(\frac{a^5}{\sqrt[7]{b^5}}\right)^{-3}$ по основанию 3

_____ ;
_____ ;

9. Операцию, обратную логарифмированию называют

_____ ;

10. Найдите x по его логарифму:

а) $lgx = lg\log_4 256 + lg2$

_____ ;
_____ ;

б) $\log_{0,2} = \log_{0,2} \log_7 343 - \log_{0,2} 4$

_____ ;
_____ ;

в) $\log_{\frac{5}{12}} x = 2\log_{\frac{5}{12}} - 5\log_{\frac{5}{12}} 2$

_____ ;
_____ ;

г) $\log_{61} x = \log_{61} lg1000 + \log_{61} 17$

_____ ;
_____ ;

11. Вычислите:

а) $3\log_2 \frac{1}{8} + 10^{\lg 2 + \lg 5}$

_____ ;

б) $2\log_3 \frac{1}{27} + 6^{\log_6 72 - \log_6 2}$

_____ ;

в) $\log_{0,6}(\log_8 32) + 49^{\log_{\sqrt{7}} \sqrt{2}}$

_____ ;

г) $\frac{\lg 900 - 2}{2\lg 0,5 + \lg 12}$

_____ ;

д) $3^{\frac{2}{\log_5 2}} + \frac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_4 81}$

_____ .

12. Упростите выражение:

а) $\frac{\lg b}{\lg a} + \frac{2}{\log_b a} - \log_a b^3$

_____ ;

б) $a^{2\log_a b} - (\log_a a^b)^2$

_____ ;

$$в) \frac{3}{\log_a b} - \log_b a^2 - \frac{\log_3 a}{\log_3 b}$$

$$г) \log_b b^a - b^{2\log_b \sqrt{a}}$$

13. Найдите значение выражения:

а) $\lg \operatorname{ctg} 31^\circ \lg \operatorname{ctg} 59^\circ$

б) $\lg \operatorname{ctg} 42^\circ + \lg \operatorname{ctg} 48^\circ$

в) $\frac{\log_3^2 6 - \log_3^2 2}{\log_3 12}$

г) $\frac{\log_5^2 10 - \log_5^2 2}{\log_5 20}$

14. Известно, что

а) $\log_3 2 = c$. Найдите $\log_3 8$.

б) $\log_{0,5} 3 = a$. Найдите $\log_{0,5} 81$.

в) $\log_5 2 = a$. Найдите $\log_5 10$.

г) $\log_6 4 = m$. Найдите $\log_6 24$.

д) $\log_6 42 = b$. Найдите $\log_6 7$.

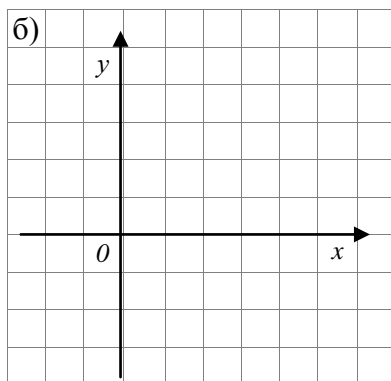
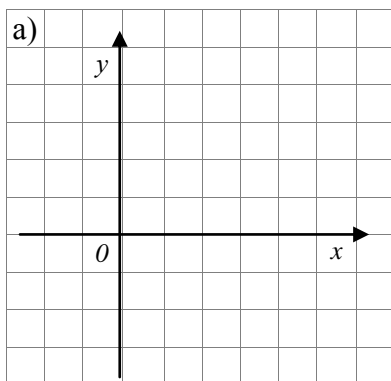
5.5. Логарифмическая функция, ее свойства и график

1. Логарифмической функцией с основанием a , называется

2. В одной и той же системе координат постройте графики функций, если:

а) $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_4 x$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



Сделайте вывод об изменении графика функции в зависимости от основания логарифма:

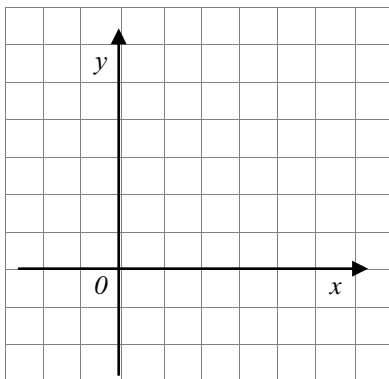
при $a > 1$ _____;

при $0 < a < 1$ _____.

Перечислите общие свойства этих графиков.

3. Сформулируйте основные свойства логарифмической функции, постройте график.

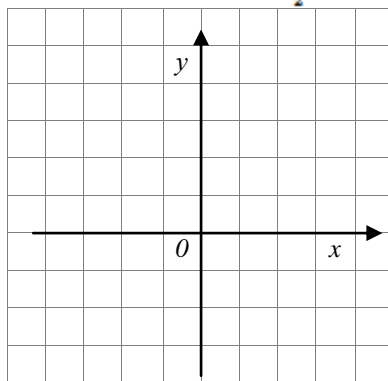
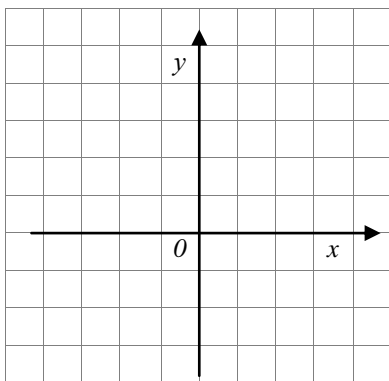
- а) $D(f) = \underline{\hspace{2cm}}$;
 б) $E(f) = \underline{\hspace{2cm}}$;
 в) при $a > 0$ $\underline{\hspace{2cm}}$;
 при $0 < a < 1$ $\underline{\hspace{2cm}}$.



4. В одной и той же системе координат постройте графики функций:

а) $y = 2^x$; $y = \log_2 x$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



Постройте прямую $y = x$ и сделайте выводы о поведении графиков показательной и логарифмической функции с одинаковым основанием относительно прямой $y = x$.

5. Выясните, является ли функция возрастающей или убывающей:

а) $y = \log_{0,075} x$ _____;

б) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ _____;

в) $y = \lg x$ _____;

г) $y = \log_{2,6} x$ _____;

д) $y = \log_{\frac{3}{4}} x$ _____;

е) $y = \log_{\sqrt{3}} x$ _____;

ж) $y = \log_{0,9} x$ _____;

з) $y = \log_{\pi} x$ _____.

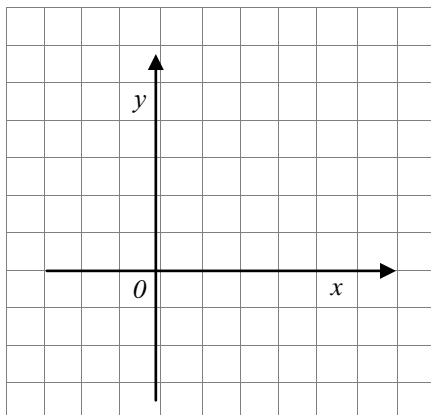
6. Схематично постройте графики следующих функций:

а) $y = \log_7 x$;

б) $y = \lg x$;

в) $y = \log_{\frac{75}{100}} x$;

г) $y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$.



7. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_4(x - 1)$

_____ ;
_____ ;

б) $y = \log_2(x^4 + 2x)$

_____ ;
_____ ;

в) $y = \log_{0,3}(1 + x)$

_____ ;
_____ ;

г) $y = \log_{\sqrt{2}}(4 - x^2)$

_____ ;
_____ ;

д) $y = \log_3(x^2 - 3x - 4)$

_____ ;
_____ ;

е) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$

_____ ;
_____ ;

ж) $y = \log_{\pi}(2^x - 2)$

_____ ;
_____ ;

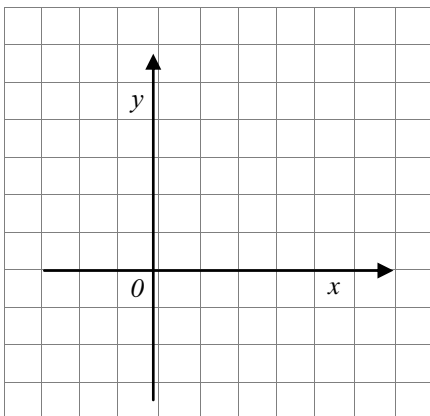
8. Выясните, является ли положительным или отрицательным число:

$\log_3 4,5$ _____ ; $\log_3 0,45$ _____ ; $\log_5 25,3$ _____ ;

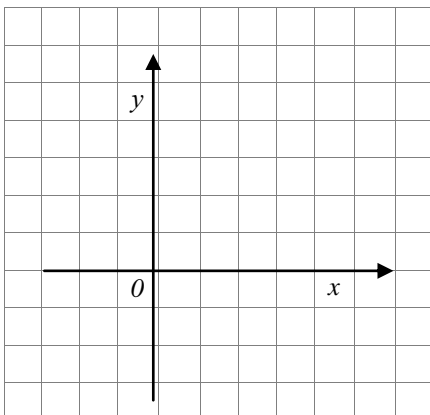
$\log_5 2$ _____ ; $\log_{\frac{1}{5}} 3$ _____ ; $\log_3 \frac{1}{2}$ _____ ;

9. Постройте график функции, найдите ее область определения и множество значений:

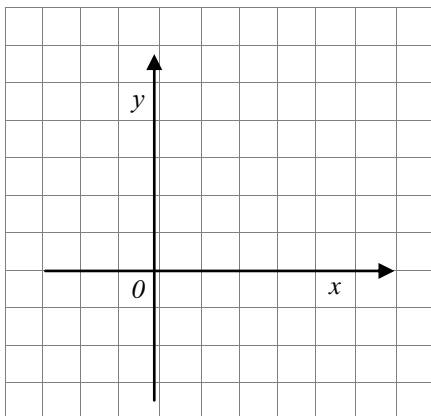
а) $y = \log_3(x - 1)$



б) $y = \log_{\frac{1}{8}}x - 1$



$$в) y = 1 + \log_3(x - 1)$$



10. Найдите, при каком значении x значение функции $y=f(x)$ равно b .

а) $y = \log_{\frac{1}{3}}x;$

$b=2$ _____;

$b=-3$ _____;

$b = \frac{1}{2}$ _____;

$b = -\frac{2}{3}$ _____.

б) $y = \log_4x;$

$b = -1$ _____;

$b = \frac{3}{2}$ _____;

$b = -\frac{1}{3}$ _____;

$b = 2\frac{1}{2}$ _____.

5.6. Логарифмические уравнения

1. Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида _____.

2. Является ли уравнение логарифмическим?

а) $lg100 + xlg10 = 3$ _____;

б) $log_3 27 = 2x + 1$ _____;

в) $log_2(x - 1) = log_2(3 - 2x)$ _____;

г) $2log_{\frac{1}{2}}x = 4$ _____.

3. Решите уравнения:

а) $log_2(3x - 6) = log_2(2x - 3)$

_____;

_____;

б) $log_{0,2}(12x + 8) = log_{0,2}(11x + 7)$

_____;

_____;

в) $log_3(x^2 + 6) = log_3 5x$

_____;

_____;

г) $lg(x^2 - 6) = lg(8 + 5x)$

_____;

_____;

д) $log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0$

_____;

_____;

$$\text{e) } \log_7(x^2 - 12x + 36) = 0$$

$$\text{ж) } \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$$

$$\text{з) } \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$$

$$\text{и) } \log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5$$

$$\text{к) } 4\log_{0,1} x = \lg_{0,1} 2 + \lg_{0,1} 8$$

$$\text{л) } \log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3(2x - 1)$$

$$\text{м) } \log_{23}(2x - 1) - \log_{23} x = 0$$

4. Известно, что $f(x) = \log_3(5x - 2)$. Решите уравнение:
 $f(x) = f(3x - 1)$.

5. Известно, что $f(x) = \log_2(8x - 1)$. Решите уравнение:
 $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + 6\right)$.

6. Найдите решение уравнения:

а) $3x = \frac{\frac{1}{2}\log_5 64 - 2\log_5 2}{\log_5 2}$

б) $\left(\frac{x}{2} + 4\right) = \frac{2\log_{0,5} 2 + \log_{0,5} \sqrt{10}}{\log_{0,5} 10 - \log_{0,5} \sqrt{10} + \log_{0,5} 4}$

7. Пусть x_0 – наибольший корень уравнения:

а) $\lg(2x^2 - 5x) = \lg(15x - 12)$, найдите $7 - \frac{1}{7}x_0$

б) $\lg(3x^2 + 12) = \lg(x^2 - 10x)$, найдите $4 + \frac{1}{2}x_0$

в) $\lg(3x^2 + 16) = \lg(x^2 - 12x)$, найдите $\frac{1}{2}x_0 + 5$

8. Найдите сумму и произведение абсцисс всех общих точек графиков функций $f(x)$ и $g(x)$.

а) $f(x) = 13^{\log_{13}(x-7)}$, $g(x) = x^2 - 14x + 49$

_____ ;

б) $f(x) = \log_{\pi}(x^2 + 3x)$, $g(x) = \log_{\pi}(8 + x)$

_____ ;

в) $f(x) = \lg(x^2 - 3x)$, $g(x) = \lg(3x + 7)$

_____ ;

9. Найдите наименьший корень уравнения:

а) $3\log_4 x - x \cdot \log_4 x = x - 3$

_____ ;

б) $\log_8(3x - 5) = \frac{1}{3} - \log_8 x$

_____ ;

в) $\frac{2}{\log_4(x+1)} = \frac{\log_4(x+1)^4}{0,5}$

_____ ;

10. Решите уравнение $f(x) = f(x^2 - 2)$, если $f(x) = \log_5(2x - 3)$.

_____ ;

ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

6.1. Производная показательной функции. Число e

1. $\alpha = 45^\circ$, тогда $\operatorname{tg}\alpha =$ _____.

2. При каком значении a показательная функция $y = a^x$ при $x = 0$ имеет производную, равную 1?

3. Дайте определение числа e .

4. Какая функция называется экспонентой? Чему равна производная этой функции?

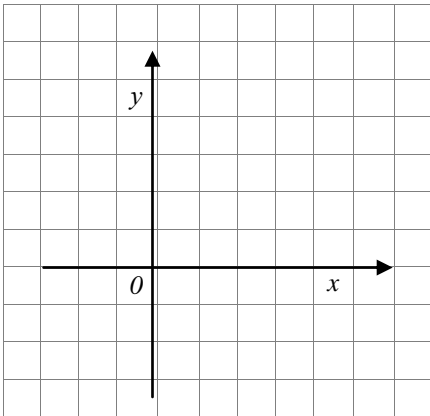
5. В основании натурального логарифма лежит число _____.

6. Представьте a^x в виде степени с основанием e .

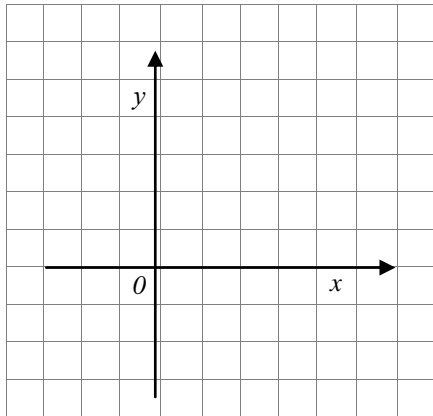
7. Докажите, что $(a^x)' = a^x \ln a$.

8. Постройте графики функций:

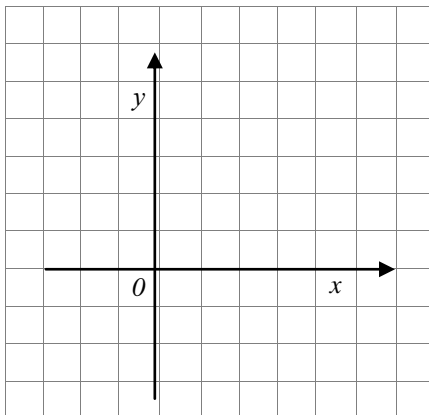
$$y = 2^x$$



$$y = 2,5^x$$



$$y = 3^x$$



К каждому графику проведите касательные в точке $x=0$. Как меняется угол наклона касательной к оси O_x ?

9. Найдите производную функции

а) $f(x) = 3e^x - 3^x$

б) $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + 0,5^{-x}$

в) $f(x) = 2^x + 2e^x$

г) $f(x) = e^{x^2-x} - 0,2^{-x}$

д) $f(x) = \operatorname{sine}^{\sqrt{x}} - 2^{2x-x^2}$

е) $f(x) = \operatorname{cose}^{x^2-x} + 3^{\sqrt{2x+1}}$

ж) $f(x) = e^{\operatorname{arctg}x} \cdot (1+x^2)$

з) $f(x) = e^{\operatorname{tg}x} \cdot \cos^2x$

и) $f(x) = 2^{\cos x+1} \cdot e^{\sqrt{3+x}}$

к) $f(x) = \frac{e^{3+2x}}{\cos(3-2x)}$

10. Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = x \cdot e^{1-2x^2}$

;

б) $f(x) = x^2 e^{2x-1}$

;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2 e^x}$

;

г) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$

.

6.2. Производная логарифмической функции

1. Имеет ли функция $y = \log_a x$ производную в каждой точке своей области определения? Ответ обоснуйте.

2. $\ln'x = \underline{\hspace{2cm}}$. Какие правила, теоремы использованы для доказательства данного равенства?

3. Докажите, что $\ln'x = \frac{1}{x}$.

4. Используя формулу перехода от одного основания логарифма к другому, докажите, что $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

5. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2\ln(x + 1)$

б) $f(x) = 2 - \lg x$

$$B) f(x) = -3 \ln \frac{x+1}{3}$$

$$Г) f(x) = \log_2 \cos x$$

$$Д) f(x) = \lg \frac{x}{x+2}$$

$$e) f(x) = \ln \frac{3x^2+2}{x^2+1}$$

$$ж) f(x) = x^{\ln x}$$

$$з) f(x) = \log_x e^x$$

$$И) f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

$$К) f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$$

6. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

б) $f(x) = \ln x^3 + \frac{6}{x}$

в) $f(x) = \ln \frac{1}{x} - \frac{3}{x}$

7. Найдите точки экстремума функции $y = f'(x)$, если $f(x) = 0,5x^2 + 4\ln x + 5$.

8. Определите, при каких значениях x верно равенство:

а) $(\ln(x^2 - x - 2))' = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$

б) $(\ln(3 - 2x - x^2))' = -\frac{2x+2}{3-2x-x^2}$

9. Определите, совпадает ли область определения функции $g(x)$ с областью определения ее производной, если $g(x) = \ln(9x^2 + 6x + 1)$.

10. Найдите значение функции $f(x)$ в точках экстремума функции $f(x) = 4 \log_4 \frac{(x+8)^2}{x^3 - 12x} + \log_{0,5}(x+8)$.

6.3. Первообразная показательной функции

1. Теорема: Первообразной для функции a^x на R является функция $\frac{a^x}{\ln a}$. Доказательство:

2. Найдите две различные первообразные для функции $g(x)$ и укажите, график какой из них лежит выше, если:

а) $g(x) = e^{7-3x} - 0,5^{-x}$

б) $g(x) = e^{4x-3} + 0,1^{-x}$

3. Докажите, что функция $\ln|x|$ является первообразной для функции $\frac{1}{x}$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = e^x(xe^{-x} - e^{5-3x})$

б) $f(x) = e^{-x}(e^{4-x} - x^3e^x)$

$$B) f(x) = (5^{-x} - 0,1^{-x}) \cdot (5^{-x} + 0,1^{-x})$$

$$Г) f(x) = (0,5^{-x} - 3^{-x})(0,5^{-x} + 3^{-x})$$

$$Д) f(x) = 2^{3x-4} + \frac{3}{3x-4}$$

$$e) f(x) = e^{\frac{x+1}{2}} - \frac{5-6x^2}{x}$$

$$Ж) f(x) = \frac{3}{2x-5} - 5e^{2x+\frac{1}{8}} + 5^{3-x}$$

$$З) f(x) = \frac{x+2}{x^2-4} - 2^{x-2}$$

$$И) f(x) = \frac{8^x}{2^{x+2}} - \frac{1}{x+2}$$

$$К) f(x) = \frac{x-5}{x^2-25} + e^{2x+10} - 5^{2x+10}$$

5. Определите, совпадает ли область определения функции $g(x)$ с областью определения ее первообразной, если $g(x) = \frac{1}{8-x} + \frac{1}{\sqrt{4-0,5x}}$.

6. Найдите первообразную $F(x)$, если:

а) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2x+1}, F(0) = 3$

б) $f(x) = e^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{1-0,5x}, F(0) = -1$

7. Для функции $g(x)$ найдите первообразную, которая в точке $x_0=0$ принимала бы такое же значение, как и производная $g'(x)$ в этой точке:

а) $g(x) = e^{2x} + \frac{1}{2x+1}$

б) $g(x) = e^{-3x} - \frac{1}{3x+1}$

8. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^{-1} 3^x dx$

б) $\int_1^2 2^x dx$

в) $\int_2^4 0,5e^{\frac{x}{2}} dx$

г) $\int_3^6 \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} dx$

д) $\int_0^1 (e^{-x} + 1)^2 dx$

е) $\int_0^1 (e^{-x} - 1)^2 dx$

ж) $\int_{-2}^{-1} 10^x 2^{-x} dx$

з) $\int_{-3}^{-1} 3^{-x} 6^x dx$

и) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x} dx$

к) $\int_0^1 \frac{2^x + 3^x}{6^{x+1}} dx$

$$\text{Л) } \int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{5x} dx$$

$$\text{М) } \int_0^1 \frac{2^{x+1} + 5^{x+1}}{10^x} dx$$

$$\text{Н) } \int_e^{e^2} \frac{2}{x} dx$$

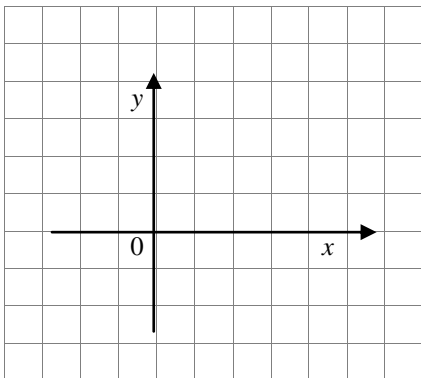
$$\text{О) } \int_0^6 \frac{dx}{0,5x+1}$$

$$\text{П) } \int_1^3 \frac{3}{3x-2} dx$$

9. При каком значении a $\int_{0,5a}^a e^{2x} dx = 1$?

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функции:

а) $y = e^{-x}$; $y = e^x$; $y = e$; $x = e$



б) $y = \frac{2}{x}$; $y = 2$; $x = \frac{1}{e^2}$

